ФИПИ

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

ГИА

Государственная итоговая аттестация
выпускников 9 классов
в новой форме

АЛГЕБРА

ИНТЕЛЛЕКТ-ЦЕНТР

2010

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

ФИПИ

ГОСУДАРСТВЕННАЯ ИТОГОВАЯ АТТЕСТАЦИЯ ВЫПУСКНИКОВ 9 КЛАССОВ В НОВОЙ ФОРМЕ

АЛГЕБРА

2010

ИНТЕЛЛЕКТ-ЦЕНТР

«Интеллект-Центр»
2010

УДК 373.167.1:512(075.3)
ББК 22.14я721.6
Г 72

Авторы-составители:
Кузнецова Л. В., Суворова С. Б., Бунимович Е. А., Колесникова Т. В., Рослова Л. О.

Г 72 Государственная итоговая аттестация выпускников 9 классов в новой форме. Алгебра. 2010 / ФИПИ. — М.: Интеллект-Центр, 2010. — 128 с.

ISBN 978-5-89790-622-2

Пособие, содержащее разработанные специалистами ФИПИ материалы для итоговой аттестации учащихся в 9 классе, поможет лучше подготовиться к экзамену по новой форме, а также проверить свои знания и умения по предмету. Учитель получает возможность сделать познавательную деятельность на уроке более разнообразной, обеспечить целенаправленную подготовку учеников к итоговым испытаниям. Родители школьников, познакомившись с данным изданием, смогут составить представление о новой модели экзамена за основную школу.

УДК 373.167.1:512(075.3)
ББК 22.14я721.6

Генеральный директор
издательства «Интеллект-Центр» *Миндюк М. Б.*

Компьютерная верстка и макет: *Погодин В. Н.*

Подписано в печать 10.09.2009 г. Формат 60x84 $^1/_{16}$.
Гарнитура Петербург. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 8,0. Тираж 50 000 экз. Зак. 1630

Отпечатано в ОАО «Чеховский полиграфический комбинат»
Сайт: www.chpk.ru E-mail:marketing@chpk.ru
факс 8(496) 726-54-10, тел. 8(495) 788-74-65

ISBN 978-5-89790-622-2

СОДЕРЖАНИЕ

1. О НОВОЙ ФОРМЕ ГИА ПО АЛГЕБРЕ

Общие положения

Новый экзамен по алгебре создавался как естественное развитие действующего. Он сохраняет все его принципиальные особенности. Этот экзамен предполагает проверку усвоения материала на базовом и повышенных уровнях, что дает возможность учащимся с разными способностями и интересами продемонстрировать свою реальную подготовку. В нем сохраняется идея резервного числа заданий, и тем самым обеспечивается право учащегося на ошибку, на выбор задач для решения.

Основные изменения, которые вносятся в систему государственной (итоговой) аттестации в 9 классе, связаны с общим направлением модернизации системы образования, которая, в частности, предполагает более современные способы и методы контроля, адекватные современным требованиям к подготовке учащихся общеобразовательных учреждений. Эти изменения направлены, во-первых, на обеспечение объективности и независимости процедуры оценивания учебных достижений учащихся, во-вторых, на усиление ее дифференцирующих возможностей. Последнее связано и с введением профильного обучения учащихся в старших классах общеобразовательных учреждений, которое диктует обеспечение высокой дифференцируемости оценивания с тем, чтобы результаты экзамена могли использоваться при формировании профильных классов, а также при наборе в учреждения системы среднего профессионального образования.

Перевод на более объективную и прозрачную основу вопросов приема в профильные школы и классы реализуется через переход к «внешней» процедуре проведения выпускных экзаменов девятиклассников взамен традиционной внутришкольной процедуры. Основным механизмом перехода к «внешним» формам оценивания учебных достижений учащихся являются региональные или муниципальные экзаменационные комиссии (РЭК, МЭК). В функции этих комиссий входит решение всех организационных вопросов, связанных с проведением государственной (итоговой) аттестации, в частности, создание предметных экзаменационных комиссий, которые осуществляют проверку и оценивание работ учащихся. В состав комиссий входят специалисты методических служб, руководители общеобразовательных учреждений, представители учреждений начального и среднего профессионального образования, а также родительской общественности.

Создание РЭК и МЭК позволяет реализовать такой ключевой принцип построения новой системы итоговой аттестации выпускников основной школы, как разделение функции обучения и функции проверки учебных достижений обучаемых. Новая процедура проведения экзамена не предусматривает присутствие в аудитории, в которой проводится экзамен, учителя, преподававшего в этом классе. Однако он может входить в состав предметной экзаменационной комиссии, в функции которой входит проверка экзаменационных работ и выставление отметки за их выполнение. Это возможно, благодаря анонимности проверки экзаменационных работ учащихся.

Содержание и структура контрольно-измерительных материалов

Содержание экзаменационных заданий по алгебре находится в рамках содержания образования, обозначенного «Федеральным компонентом государственного стандарта общего образования. Математика. Основное общее образование; 2004».

Работа состоит из двух частей. Общее количество заданий в работе — 21.

Часть 1 направлена на проверку достижения уровня базовой подготовки. Она содержит 16 заданий, предусматривающих три формы ответа: с выбором одного верного ответа из четырех предложенных, с кратким ответом и на соотнесение.

С помощью этих заданий проверяется знание и понимание важных элементов содержания (понятий, их свойств, приемов решения задач и пр.), владение основными алгоритмами, умение применить знания к решению математических задач, не сводящихся к прямому применению алгоритма, а также применение знаний в простейших практических ситуациях. При выполнении заданий первой части учащиеся также должны продемонстрировать определенную системность знаний и широту представлений, умение переходить с одного математического языка на другой, узнавать стандартные задачи в разнообразных формулировках.

В основу структурирования первой части работы положен содержательный принцип задания расположены группами в соответствии с разделами содержания, к которым они относятся. Для обеспечения полноты и представительности проверки все арифметикоалгебраическое содержание курса основной школы разделено на семь блоков: *числа; буквенные выражения; преобразования алгебраических выражений; уравнения и системы уравнений; неравенства; последовательности и прогрессии; функции* (в ближайшей перспективе этот перечень будет дополнен блоком, содержащим вероятностно-статистический материал). В первой части любой работы всегда представлены все перечисленные разделы, причем число заданий по каждому из них примерно соответствует удельному весу этого раздела в школьном курсе и является инвариантным для каждой работы. Последовательность же предъявления этих блоков в конкретных экзаменационных работах может варьироваться.

Часть 2 направлена на дифференцированную проверку повышенного уровня владения материалом. Она содержит 5 заданий разного уровня сложности, требующих развернутого ответа (с полной записью решения). Все пять задач представляют разные разделы содержания. Каждое из них относится к одному из следующих семи разделов: *выражения и их преобразования; уравнения; неравенства; функции; координаты и графики; арифметическая и геометрическая прогрессии; текстовые задачи.*

Все задания этой части носят комплексный характер. Они позволяют проверить владение формально-оперативным алгебраическим аппаратом, способность к интеграции знаний из различных тем школьного курса, владение исследовательскими навыками, а также умение найти и применить нестандартные приемы рассуждений. При выполнении второй части работы учащиеся должны продемонстрировать умение математически грамотно записать решение, приводя при этом необходимые пояснения и обоснования.

Задания во второй части расположены по нарастанию сложности — от относительно простой задачи до задач достаточно сложных, требующих свободного владения материалом курса и высокого уровня математического развития. Фактически при этом во второй части работы представлены три разных уровня. Первое задание (задание № 17 в экзаменационной работе), самое простое. Как правило, оно направлено на проверку владения формально-оперативными навыками: преобразование выражения, решение уравнения, неравенства, системы, построение графика. По уровню сложности это задание лишь немногим превышает обязательный уровень.

Следующие два задания (задания 18 и 19 экзаменационной работы) более высокого уровня, они сложнее первого и в техническом, и в логическом отношении, при их выполнении часто приходится интегрировать знания из различных разделов курса, т.е. они, как правило, носят комплексный характер. При хорошем выполнении первой части, правильное решение этих заданий уже обеспечивает получение «пятерки».

И, наконец, последние два задания (№ 20 и 21) — наиболее сложные, они требуют свободного владения материалом и довольно высокого уровня математического развития. Рассчитаны эти задачи на выпускников, изучавших математику более основательно, чем в рамках пятичасового курса — это, например, углубленный курс математики, элективные курсы в ходе предпрофильной подготовки, математические кружки и пр. Хотя эти задания не выходят за рамки содержания, предусмотренного стандартом основной школы, при их выполнении выпускник имеет возможность продемонстрировать владение довольно широким набором некоторых специальных приемов (выполнения преобразований, решения уравнений, систем уравнений), проявить некоторые элементарные умения исследовательского характера.

О системе оценивания

Специфика математики как школьного предмета состоит в том, что ее изучение в значительной степени строится на системе опорных знаний, без овладения которыми невозможно дальнейшее продвижение по курсу. Поэтому в ходе экзамена учащийся должен продемонстрировать наличие у него опорных знаний, которые позволят ему хотя бы на минимальном уровне изучать курс математики старшей школы. Именно этим объясняется принятый при оценивании подход, согласно которому для получения минимальной положительной отметки учащийся должен выполнить определенное, фиксированное количество заданий первой части экзаменационной работы (в 2008 году — 8 заданий из 16); в противном случае ему выставляется неудовлетворительная отметка, и результаты выполнения заданий второй части не учитываются. Таким образом, первая часть экзаменационной работы служит допуском к проверке на повышенном уровне. Такой подход к оцениванию чрезвычайно важен, так как в 9-м классе необходимо обеспечить возможность продолжения обучения в старшем звене, причем, не только по математике, но и по другим предметам, так как отсутствие определенных математических знаний негативно отражается на изучении предметов естественнонаучного цикла, а недостатки в развитии логического мышления — и на изучении гуманитарных предметов.

Предложенная к использованию в новых условиях некомпенсаторная система оценивания работает и в рамках традиционной государственной (итоговой) аттестации по алгебре (причем, выпускников не только основной, но и старшей школы) уже более 10 лет, она «проявила себя» с положительной стороны, сделав порядок выставления оценки более прозрачным, а требования к математической подготовке учащихся более конкретными.

Для оценивания результатов выполнения работ учащимися наряду с традиционной отметкой «2», «3», «4» и «5» применяется еще один количественный показатель — общий балл, который формируется путем суммирования баллов, полученных учащимся за выполнение первой и второй частей работы. Все задания в первой части имеют одинаковый вес. Каждому заданию второй части изначально присваивается определенный балл по прогрессивному принципу. Выпускник, демонстрирующий умение решить задачу определенного уровня, получает установленный балл (или «частичный» балл, зависящий от погрешностей и недочетов в решении). При этом принципиальным условием является следующее: задание оценивается положительным баллом только в том случае, когда из записей однозначно можно сделать вывод о том, что выпускник знает ход решения.

С помощью общего балла, расширяющего традиционную шкалу оценивания, во-первых, проводится более тонкая дифференциация математической подготовки, а во-вторых, отметка несет больше информации. Общий балл нагляден, легко интерпретируется учителем, учеником, родителями. Можно видеть, например, какую четверку получил ученик — слабую или близкую к пятерке, или, хотя он и получил отметку 3», но входит в «группу риска». Введение большего числа градаций особенно информативно для дифференциации по уровням подготовки хорошо успевающих учащихся.

Организационные особенности

На проведение экзамена отводится 240 минут. На выполнение первой части выделяется 60 минут, но по решению региона это время может быть увеличено до 90 минут. (Как показывает практика, многие учащиеся выполняют первую часть работы за 35—40 мин.) По истечении установленного времени учащиеся сдают первую часть работы. В то же время приступать к выполнению второй части можно, не дожидаясь истечения этого времени.

Ответы на задания первой части фиксируются непосредственно в бланке с заданиями. По решению региона могут использоваться машиночитаемые бланки ответов, позволяющие применять компьютерную проверку результатов выполнения этой части работы. Задания второй части, требующие развернутого ответа, выполняются на отдельных листах.

Во время проведения экзамена в классе присутствует учитель-организатор, который не является учителем математики; присутствие в аудитории учителя, преподававшего в этом классе, не предусматривается. В функции организатора входит ознакомление учащихся с процедурой проведения экзамена и обеспечение соблюдения этой процедуры. Проверка и оценивание экзаменационных работ учащихся осуществляется членами предметных экзаменационных комиссий. Этими мерами реализуется переход к «внешней» процедуре проведения выпускных экзаменов девятиклассников взамен традиционной внутришкольной процедуры, перевод на более объективную и прозрачную основу вопросов приема в профильные школы и классы.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЭКЗАМЕНУ

2.1. Характеристика заданий экзаменационной работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, каждая из которых имеет свою целевую установку. Первая часть направлена на проверку наличия у школьников базовой подготовки, т.е. на проверку усвоения элементов содержания, составляющих основы курса, без знания которых невозможно изучение математики и смежных предметов на старшей ступени школы. Вторая часть работы направлена на проверку владения материалом курса на повышенных уровнях. Ее цель — выявить умение решать задачи, значимые с точки зрения полноценного и качественного усвоения курса, а также возможности последующего изучения математики на профильном уровне. В связи с существенным различием в целевых установках первой и второй частей экзаменационной работы спецификацией экзамена предусмотрены и принципиально разные подходы к их содержательному наполнению. Остановимся отдельно на рассмотрении особенностей заданий каждой части работы.

Характеристика заданий первой части работы

Прежде всего, отметим, что при новой форме аттестации изменено само понятие базовой алгебраической подготовки школьников. Если раньше в проверке делался акцент на владение основными алгоритмами, рассматриваемыми в курсе, то теперь усилено, по сравнению с традиционной практикой, внимание к идейно-понятийной и практической составляющим. Базовая подготовка в современном ее понимании предполагает не только владение на элементарном уровне важнейшими алгоритмами, но и знание основных определений, терминов и символов, свойств понятий, а также умение применять свои знания к решению несложных задач как математического, так и практического характера. При выполнении заданий первой части учащиеся должны продемонстрировать определенную системность знаний и широту представлений, умение переходить с одного языка на другой, узнавать стандартные задачи в разнообразных формулировках. Таким образом, можно констатировать, что при новой форме аттестации от учащихся на базовом уровне требуется владение более широким кругом умений, относящихся к области познавательной деятельности; при этом содержание обучения, по сути, остается в прежнем объеме.

Напомним, что первая часть экзаменационной работы представлена в форме теста, содержащего 16 заданий. Чтобы эти задания обеспечивали содержательную полноту и репрезентативность проверки на базовом уровне, а также сбалансированность подвергаемых проверке видов познавательной деятельности, они распределяются по двум составляющим содержательной основы экзаменационной проверки. С одной стороны, это подразделы, на которые разбито все арифметико-алгебраическое содержание курса математики основной школы, обязательное для усвоения; с другой стороны, это категории познавательной деятельности, владение которыми на базовом уровне также считается обязательным. Распределение заданий по содержательным блокам и по видам познавательной деятельности показано в таблицах 1 и 2.

Таблица 1. **Распределение заданий первой части работы по разделам содержания**

Раздел содержания	Число заданий
Числа	3
Буквенные выражения	2
Преобразование выражений	3
Уравнения	3
Неравенства	2
Последовательности и прогрессии	1
Функции	2

Таблица 2. **Распределение заданий первой части работы по видам познавательной деятельности**

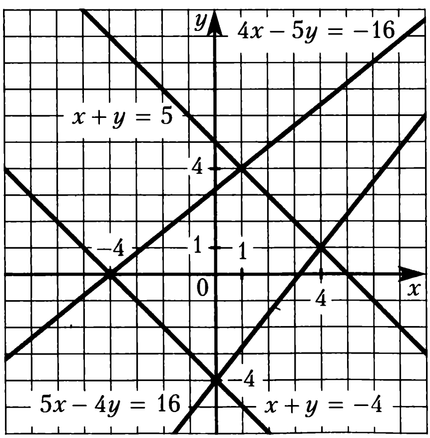
Познавательная категория	Число заданий
Знание/понимание	4
Умение применить известный алгоритм	5
Умение решить математическую задачу	3
Применение знаний в практической ситуации	4

Таким образом, каждое из шестнадцати заданий первой части работы имеет две основные характеристики. Первая соотносит его с одним из разделов содержания, вторая — с одной из познавательных категорий. Задания, относящиеся к одному и тому же разделу содержания, могут быть направлены на проверку владения разными познавательными умениями. Проиллюстрируем это, сопоставив следующие два задания:

1. (Задание с открытым ответом). Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - y = 8, \\ x - 4y = -1. \end{cases}$$

2. (Задание с выбором ответа). Используя рисунок, выберите систему двух уравнений с двумя переменными, решением которой является пара $(-4; 0)$.



1) $\begin{cases} x + y = -4, \\ 5x - 4y = 16 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 5x - 4y = 16 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = -4, \\ 5x - 4y = -16 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 5x - 4y = -16 \end{cases}$

Оба задания относятся к содержательному блоку «Уравнения»; более того, в каждом из них предметом рассмотрения является система двух уравнений с двумя переменными. Однако, если в первом случае задание относится к категории «применение изученного алгоритма» (на первом плане здесь ***владение приемом*** решения системы линейных уравнений), то во втором это категория «знание/понимание». В самом деле, чтобы, используя рисунок, выполнить второе задание, нужно ***понимать*** графическую интерпретацию решения системы двух уравнений с двумя переменными. Конечно, ответ можно получить и путем подстановки пары (-4;0) в уравнения каждой из предложенных систем. Однако и при таком решении нужно, прежде всего, *знать,* какую пару чисел называют решением системы.

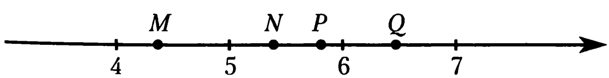
Заметим, что принадлежность задания к тому или иному разделу содержания практически всегда достаточно очевидна. Тем более, что в основу структурирования первой части работы положен содержательный принцип: задания расположены группами в соответствии с разделами содержания, к которым они относятся. Что касается второй характеристики, то она нередко проявляется через «аранжировку» задания — специфическую постановку вопроса, использование практического контекста и т.д.

Ниже приведены примеры заданий по каждой из четырех познавательных категорий. Они относятся к различным разделам содержания.

Сначала рассмотрим задания, иллюстрирующие познавательную категорию «знание/понимание».

Пример 1. (Раздел «Числа»; задание с выбором ответа).

Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{34}$. Какая это точка?



1) M 2) N 3) P 4) Q

Пример 2. (Раздел «Буквенные выражения»; задание с выбором ответа). Даны выражения: 1) $\frac{a+3}{a}$; 2) $\frac{a}{a+3}$; 3) $\frac{a+\frac{3}{a}}{3}$. Какие из этих выражений не имеют смысла при $a = 0$?

1) Только 1 2) Только 3 3) 1 и 3 4) 1, 2 и 3

Пример 3. (Раздел «Преобразование выражений»; задание с выбором ответа). Какое из следующих выражений тождественно равно дроби $\frac{x-4}{x-1}$?

1) $\frac{4-x}{x-1}$ 2) $\frac{x-4}{1-x}$ 3) $-\frac{4-x}{x-1}$ 4) $-\frac{4-x}{x-1}$

Пример 4. (Раздел «Неравенства»; задание с выбором ответа). Известно, что $y - x > z$. Какое из следующих утверждений при всех x, y и z, удовлетворяющих этому условию, является верным?

1) $z - y < x$ 2) $x + z > y$ 3) $y - x - z > 0$ 4) $x + y + z < 0$

Пример 5. (Раздел «Последовательности и прогрессии»; задание с выбором ответа). Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них — арифметическая прогрессия. Укажите ее.

1) 1; 2; 3; 5; 2) 1; 2; 4; 8; 3) 1; 3; 5; 7; 4) 1;

Пример 6. (Раздел «Функции»; задание с выбором ответа). Укажите уравнение прямой, которая имеет две общие точки с графиком функции $y = x^2 + 1$.

1) $y = -10$ 2) $y = 0$ 3) $y = 1$ 4) $y = 10$

Мы видим, что для выполнения этих заданий надо знать определения понятий, их свойства, некоторые факты. Так, чтобы найти на координатной прямой точку, соответствующую числу $\sqrt{34}$ (пример 1), нужно знать, что с увеличением подкоренного выражения значение арифметического квадратного корня возрастает. А чтобы найти выражение, равное дроби $\frac{x-4}{x-1}$ (пример 3), надо знать правила изменения знаков у членов дроби. Задания на распознавание арифметической прогрессии (пример 5) выполняется на основе определения, а последнее задание (пример 6) требует знания свойств графика функции вида $y = ax^2 + c$.

Остановимся теперь на заданиях, относящихся к познавательной категории «применение изученного алгоритма». Но прежде заметим, что усиление внимания к идейно-понятийной стороне обучения, к практико-ориентированному знанию отнюдь не умаляет значения алгоритмической составляющей. Соответствующую установку экзаменационной работы следует трактовать так: «не только алгоритмы». Владение «техническим аппаратом» необходимо каждому ученику для изучения на старшей ступени школы и математики, и смежных предметов. Однако на уровне базовых требований важно придерживаться принципа «разумной достаточности».

Пример 7. (Раздел «Числа»; задание с открытым ответом). Представьте значение выражения $\left(1{,}3\cdot 10^{-2}\right)\cdot\left(3\cdot 10^{-1}\right)$ в виде десятичной дроби.

Пример 8. (Раздел «Буквенные выражения»; задание с открытым ответом). Найдите значение выражения $\frac{a}{b-c}$ при $a = -2{,}7$, $b = 1{,}1$, $c = -0{,}7$.

Пример 9. (Раздел «Преобразование выражений»; задание с открытым ответом). Упростите выражение $4y(y+4)+(y-8)^2$

Пример 10. (Раздел «Преобразование выражений»; задание с выбором ответа). В выражении $4x^2 - 6xy$ вынесли за скобки общий множитель $-2x$. Какой двучлен остался в скобках?

1) $-2x-3y$ 2) $2x-3y$ 3) $-2x+3y$ 4) $2x+3y$

Пример 11. (Раздел «Преобразование выражений»; задание с выбором ответа). Упростите выражение $\frac{16}{4a-a^2}-\frac{4}{a}$.

1) $\frac{4}{4-a}$ 2) $-\frac{4}{4-a}$ 3) $\frac{1}{4-a}$ 4) $-\frac{1}{4-a}$

Пример 12. (Раздел «Преобразование выражений»; задание с открытым ответом). Упростите выражение $\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{24}}$.

Пример 13. (Раздел «Уравнения»; задание с открытым ответом). Решите уравнение $2x^2 - 20x = 0$.

Пример 14. (Раздел «Неравенства»; задание на соотнесение). Для каждой системы неравенств укажите множество ее решений.

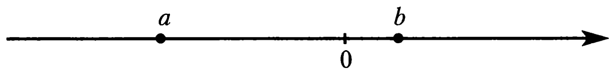
А) $\begin{cases} x \geqslant -1, \\ 3 - x \geqslant 0 \end{cases}$ Б) $\begin{cases} x \geqslant -1, \\ 3 - x \leqslant 0 \end{cases}$ В) $\begin{cases} x \leqslant -1, \\ 3 - x \geqslant 0 \end{cases}$

1) $x > -1$ 2) $x < -1$ 3) $x > 3$ 4) $-1 < x < 3$

Задания рассматриваемой категории в основном относятся к разделам «Числа», «Преобразование выражений», «Уравнения», «Неравенства». Полезно иметь в виду некоторые особенности содержания этих заданий. Они носят ограничительный характер. Так, алгоритмы вычислений встречаются, как правило, в контексте решения некоторой задачи, а не в «чистом» виде; задания на преобразование дробных выражений не «отягощаются» необходимостью перéмены знака перед дробью; если требуется разложить многочлен на множители, то достаточно уметь вынести общий множитель за скобки или воспользоваться одной из известных формул сокращенного умножения. Владение техническим навыком более высокого уровня проверяется заданиями второй части экзаменационной работы.

Перейдем теперь к заданиям, относящимся к познавательной категории, которую мы обозначили как «умение решить математическую задачу». Речь идет о поиске решения в некоторых несложных ситуациях, когда нет явно сформулированного приема, правила, алгоритма.

Пример 15. (Раздел «Числа»; задание с выбором ответа). На координатной прямой отмечены числа a и b. Какое из утверждений является верным?



1) $a + b > 0$ 2) $ab > 0$ 3) $a(a + b) > 0$ 4) $b(a + b) > 0$

Для ответа на вопрос необходимо, опираясь на имеющиеся знания, выработать некоторый план действий. Например, «считать» сначала информацию о числах a и b, изображенных на координатной прямой ($a < 0$, $b > 0$ и $|a| > |b|$); а далее, используя правила знаков, найти верное утверждение.

Однако такой способ рассуждений, хотя и позволяет получить ответ практически мгновенно, требует системных и обобщенных знаний. Ученик, знания которого не отвечают этим требованиям, может выбрать другую стратегию решения, более длинную, но вполне надежную: взять конкретные значения a и b, отвечающие условиям, показанным на рисунке (например, $a = -5$, $b = 2$), и последовательно вычислять значения указанных выражений, пока не будет найдено верное утверждение.

Пример 16. (Раздел «Буквенные выражения»; задание с выбором ответа). Автомобиль расходует a л бензина на 100 км пути. Сколько литров бензина потребуется, чтобы проехать 37 км?

1) $\frac{a \cdot 37}{100}$ л   2) $\frac{100 \cdot 37}{a}$ л   3) $\frac{a \cdot 100}{37}$ л   4) $\frac{a}{37 \ 100}$ л

Подобные сюжеты на прямопропорциональную зависимость встречались учащимся еще в 5-6 классах; известно и стандартное решение таких задач — с помощью пропорции. Однако наличие в условии буквенного данного делает задачу более абстрактной. Если такая задача вызывает затруднение (а это случается нередко), можно рекомендовать учащимся использовать следующую стратегию: «для себя» упростить ситуацию, заменив букву подходящим числом, записать нужное числовое выражение, а затем «вернуть» букву.

Пример 17. (Раздел «Преобразование выражений»; задание с открытым ответом). Найдите площадь прямоугольного треугольника, катеты которого равны $\sqrt{5} - 2$ см и $\sqrt{5} + 2$ см.

Смысл задачи состоит в применении аппарата алгебры к геометрическому сюжету: ученик должен увидеть ситуацию, в которой применима знакомая геометрическая формула, правильно подставить в эту формулу иррациональные числа, и упростить полученное выражение.

Пример 18. (Раздел «Уравнения»; задание с выбором ответа). Прочитайте задачу: «В 5 маленьких и 7 больших коробок разложили 90 карандашей, заполнив каждую целиком. В большую коробку помещается на 6 карандашей больше, чем в маленькую. Сколько карандашей в большой коробке и сколько в маленькой?»

Пусть x — число карандашей в большой коробке, y — в маленькой коробке. Выберите систему уравнений, соответствующую условию задачи.

1) $\begin{cases} x - y = 6, \\ 7x + 5y = 90 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - x = 6, \\ 7x + 5y = 90 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 6, \\ 5x + 7y = 90 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - x = 6, \\ 5x + 7y = 90 \end{cases}$

Этот пример очень показателен: текстовая задача практически всегда включается в экзаменационную работу; при этом в заданиях базового уровня, как правило, требуется только составить уравнение или систему уравнений, т.е. этими заданиями проверяется умение составить математическую модель рассматриваемой ситуации.

Пример 19. (Раздел «Последовательности и прогрессии»; задание с выбором ответа). Арифметическая прогрессия задана условиями: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 4$. Какое из данных чисел является членом этой прогрессии?

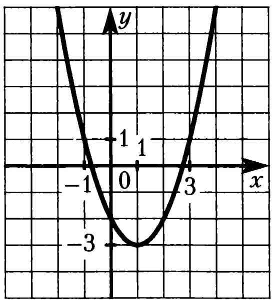
1) 38 2) 30 3) 28 4) 22

Этот пример может служить иллюстрацией того, что отнесение заданий к той или иной познавательной категории бывает достаточно условным. Так, можно считать, что это задание относится к категории «решение задач», т.к. нет специального правила, позволяющего получить ответ на поставленный вопрос. Это задание можно отнести и к категории «знание/понимание»; в самом деле, для ответа на поставленный вопрос нужно только понимание смысла рекуррентной формулы, умение «прочитать» ее.

Решить эту задачу можно по-разному. Например, с помощью рекуррентной формулы можно последовательно вычислять члены прогрессии, пока не будет получено число 28. А можно воспользоваться тем, что члены прогрессии — это последовательные натуральные числа, кратные 4. Из предложенных только одно делится на 4 — это число 28.

Пример 20. (Раздел «Функции»; задание с выбором ответа). На рисунке изображен график квадратичной функции. Какая из перечисленных формул задает эту функцию?

1) $y = x^2 - 2x - 3$
2) $y = -x^2 + 4x - 3$
3) $y = x^2 + 2x - 3$
4) $y = -x^2 - 4x - 3$



Пользуясь знаниями о графике квадратичной функции, нужно найти способ распознавания формулы, описывающей данный график.

Можно, например, рассуждать так. Ветви параболы направлены вверх, поэтому ответы 2) и 4) отпадают. Чтобы выбрать нужную формулу из двух оставшихся, можно подставить в какую-нибудь из них координаты вершины параболы; а можно найти нужную формулу, вычислив корни какого-нибудь одного из двух оставшихся трехчленов и сопоставить их с корнями, изображенными на рисунке. Таким образом, имеющиеся у учащихся знания позволяют найти разным стратегии решения.

Последняя познавательная категория — «применение знаний в практической ситуации». В ходе выполнения заданий, относящихся к этой категории, учащимся приходится выполнять разную работу с формулами, с графиками реальных зависимостей, рассматривать реальные сюжеты и выполнять некоторые расчеты, причем чáсто с использованием данных, выраженных в процентах.

Пример 21. (Раздел «Числа»; задание с выбором ответа). Туристическая фирма организует трехдневные автобусные экскурсии. Стоимость экскурсии для одного человека составляет 3500 р. Группам от 3 до 10 человек предоставляется скидка в 5%, более 10 человек — в 10%. Сколько заплатит за экскурсию группа из 8 человек?

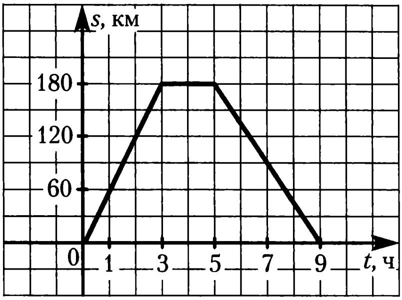
1) 37800 р. 2) 3150 р. 3) 4200 р. 4) 42000 р.

Пример 22. (Раздел «Числа»; задание с выбором ответа). Для биологической лаборатории купили оптический микроскоп, который дает возможность различить объекты размером до $2{,}5 \cdot 10^{-5}$ см. Выразите эту величину в миллиметрах.

1) 0,0000025 мм 2) 0,000025 мм
3) 0,00025 мм 4) 0,0025 мм

Пример 23. (Раздел «Буквенные выражения»; задание с открытым ответом). Зная длину своего шага, человек может приближенно подсчитать пройденное им расстояние по формуле $S = nl$, где n число шагов, l — длина шага. Какое расстояние прошел человек, если $n = 60$ см, $l = 2500$? Ответ выразите в километрах.

Пример 24. (Раздел «Функции»; задание с выбором ответа). Рейсовый автобус проделал путь из города A в город B и после стоянки вернулся обратно. На рисунке изображен график его движения: по горизонтальной оси отложено время (в часах), а по вертикальной — расстояние по шоссе от города A (в километрах). Какое из следующих утверждений **неверно**?



1) Расстояние между городами A и B равно 180 км.

2) Скорость автобуса на пути из A в B была меньше, чем на обратном пути.

3) Стоянка в городе B длилась 2 ч.

4) На обратный путь автобус затратил на 1 ч больше, чем на путь из A в B.

Завершая разговор о заданиях первой части экзаменационной работы, заметим, что кроме двух основных характеристик заданий, о которых шла речь выше, можно рассматривать еще одну. Речь идет о форме ответа. Напомним, что принципиальной особенностью первой части экзамена является то, что для каждого из шестнадцати заданий нужно указать только ответ. При этом предусматриваются две возможности: выбор верного ответа из четырех предложенных и свободный (краткий) ответ, который нужно вписать в отведенное для этого место. Понятно, что если выполняется задание со свободным ответом, то требуется непосредственное решение, как правило, письменное, с использованием черновика. Если же речь идет о задании с выбором ответа, то тактика его выполнения может быть разной.

Иногда целесообразно «идти от ответа». Пусть, например, требуется разложить на множители квадратный трехчлен $3x^2 + 9x - 30$, и даны такие варианты ответов:

1) $3(x+2)(x-5)$ 2) $3(x-2)(x-5)$

3) $3(x-2)(x+5)$ 4) $3(x+2)(x+5)$

Конечно, можно решить эту задачу «в лоб», воспользовавшись соответствующей формулой. Однако, кто-то, возможно, посчитает, что в техническом отношении проще не раскладывать на множители трехчлен, а перемножать двучлены, особенно, если сразу увидеть, что ответы 2) и 4) отпадают, так как в этих случаях свободный член не равен -30. Тогда нужно всего лишь выбрать верный ответ из двух оставшихся.

Встречаются и такие задания, когда нет другого пути, кроме как просматривать предложенные ответы — этого требует формулировка задания. Пусть, например, о числах a и b известно, что a — четное число, а b — нечетное число. Спрашивается, какое из следующих чисел при этом условии является нечетным:

1) ab; 2) $2(a+b)$; 3) $a+b$; 4) $a+b+1$.

Вспоминая свойства делимости, последовательно устанавливаем, что ab — число четное, произведение $2(a+b)$ — также четное, а сумма $a+b$, где одно слагаемое делится на 2, а другое — нет, является нечетным числом. Таким образом, выбираем ответ под номером 3.

Однако значительная часть заданий с выбором ответа рассчитана на то, что ученик письменно выполнит непосредственное решение, как и в случае с заданием со свободным ответом. Именно такая тактика, скорее всего, приведет к нужному результату.

Пример задания, когда целесообразно действовать именно таким способом, является текстовая задача, сопровождаемая четырьмя уравнениями, среди которых одно является ее правильным алгебраическим описанием. В подобном случае вряд ли есть смысл анализировать уравнения и искать среди них нужное. Проще составить уравнение самостоятельно и сопоставить его с предложенными.

Характеристика заданий второй части работы

Вторая часть экзаменационной работы направлена на то, чтобы дифференцировать хорошо успевающих школьников по уровням подготовки, выявить наиболее подготовленную часть выпускников, в частности, составляющих потенциал профильных классов. Она содержит 5 заданий, относящихся к различным разделам курса. Весь материал разбит на следующие содержательные блоки: выражения и их преобразования, уравнения и их системы, неравенства, функции, координаты и графики, арифметическая и геометрическая прогрессии, текстовые задачи.

Важно подчеркнуть, что задания, включаемые в экзамен, не выходят за рамки содержания математического образования, обозначенного стандартом. Преимущественно это задачи комплексного характера.

Направлены они на проверку таких качеств математической подготовки выпускников, как способность к интеграции знаний из различных тем курса алгебры, уверенное владение формально-оперативным алгебраическим аппаратом, а также широким набором приемов и способов рассуждений, умение математически грамотно и ясно записать решение, приводя при этом необходимые пояснения и обоснования.

Вторая часть работы включает задания трех уровней сложности. Первое задание (№ 17 — в экзаменационной работе) — наиболее простое. Как правило, это стандартное задание алгоритмического характера, направленное на проверку владения формально-оперативными или графическими умениями. В техническом отношении оно лишь немного превышает задания базового уровня. С ним могут справиться школьники, имеющие «четверку», а иногда и твердую «тройку». Второе и третье задания (№ 18 и 19) требуют более высокого уровня подготовки. Те, кто справляется с такими заданиями, могут рассчитывать на отличную оценку за экзамен. И последние два (№ 20 и 21) — это наиболее трудные задания. Они рассчитаны на учащихся, которые в той или иной форме получили усиленную подготовку по алгебре — изучали этот предмет в объеме пяти или шести уроков в неделю, занимались факультативно, посещали элективные курсы в рамках предпрофильной подготовки и др.

Как уже говорилось, задания второй части экзаменационной работы выполняются с записью решения. Единственное общее требование к оформлению решения заключается в следующем: приведенные записи должны быть математически грамотными, из них должен быть ясен ход рассуждений учащегося. При этом не следует требовать от сдающего экзамен слишком подробных письменных комментариев. Во всяком случае, не надо требовать описания алгоритмов (например, построения графика, решения неравенства). Лаконичное решение (без пропуска важных шагов), не содержащее неверных утверждений, все выкладки, которого правильны, должно рассматриваться как решение без недочетов.

Надо учитывать, что возможны разные формы ответа. Можно употреблять любую принятую запись, главное, чтобы она была грамотной. Так, при решении квадратного уравнения можно просто перечислить его корни: 2; –3; или записать: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$. При решении неравенства ответ может быть дан как в виде промежутка, например, $[-3; +\infty)$, так и в виде простейшего неравенства $x \geqslant -3$. При записи области определения функции можно использовать теоретико-множественную символику, например, $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$, или писать короче: $x \neq 0$ и $x \neq 1$.

Многие задачи, предлагаемые на экзамене, допускают разные способы решения. Ученик вправе решать задачу любым из них. Соображения типа «можно решить более рационально, более красиво и пр.» при оценивании не играют роли. Однако в ходе подготовки целесообразно показывать учащимся наиболее интересные и рациональные решения, знакомить их с некоторыми общими приемами решения тех или иных видов задач. Это будет служить пополнению их «математического багажа», и в конечном итоге, их математическому развитию.

Приведем примеры решения некоторых задач из различных разделов курса, которые включались в экзаменационные работы в разные годы.

Пример 1. Представьте выражение $x(x+1)(x+2)(x+3)-15$ в виде произведения двух многочленов.

Преобразование «в лоб» ни к чему не приведет. Поэтому воспользуемся следующим приемом: перемножим попарно крайние и средние множители при этом полученные произведения будут содержать одинаковые члены:

$$x(x+1)(x+2)(x+3)-15 = (x^2+3x)(x^2+3x+2)-15.$$

Введем новую переменную: $t = x^2+3x$. В результате получим квадратный трехчлен $t(t+2)-15$, для которого способ разложения на множители известен: $t(t+2)-15 = t^2-2t-15 = (t-3)(t+5)$.

Вернувшись к переменной x, получим: $(x^2+3x-3)(x^2+3x+5)$. Таким образом,

$$x(x+1)(x+2)(x+3)-15 = (x^2+3x-3)(x^2+3x+5).$$

Учащимся полезно знать, что прием введения новой переменной для приведения выражения к более простому виду довольно часто оказывается полезным: при преобразовании выражений, решении уравнений, неравенств, систем. Так, при решении системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x-y} - \dfrac{8}{x+y} = -2 \\ \dfrac{9}{x-y} + \dfrac{10}{x+y} = 8 \end{cases}$$

замена $\dfrac{1}{x-y} = a$, $\dfrac{1}{x+y} = b$ позволяет «избавиться» от дробей. При решении уравнения $x + \sqrt{x} - 20 = 0$ замена $\sqrt{x} = t$ позволяет избавиться от корня и свести уравнение к квадратному. При решении неравенства $(x^2+2x)^2+3(x+1)^2>3$ замена $x^2+2x=t$ позволяет получить стандартное квадратное неравенство $t^2+3(t+1)>3$, алгоритм решения которого известен. При упрощении выражения $\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1-a\sqrt{a}}{a(1-\sqrt{2})}+1$ замена $\sqrt{a}=b$ позволяет «разглядеть» в числителе разность кубов и сократить дробь.

Пример 2. Имеет ли произведение ab, где $b=5-a$, наибольшее значение, и если имеет, то при каких a и b оно достигается?

Подставив в произведение ab вместо b разность $5-a$, получим: $ab=a(5-a)=5a-a^2$. Теперь надо исследовать квадратный трехчлен $5a-a^2$. Воспользуемся свойствами квадратичной функции. Ее график — парабола. Коэффициент при a^2 отрицателен, поэтому ветви параболы направлены вниз, и функция имеет наибольшее значение.

Так как корни трехчлена — числа 0 и 5, то абсцисса вершины параболы равна 2,5. Таким образом, наибольшее значение трехчлен $5a-a^2$, а, значит, и произведение ab, принимает при $a=2{,}5$. Найдем соответствующее значение b: $b=5-a=2{,}5$. Ответ: имеет; при $a=b=2{,}5$.

При ответе на вопрос задачи мы опирались на свойства квадратичной функции. Вообще, решение многих экзаменационных задач основано на применении функциональных свойств выражений. Так, для того, чтобы доказать, что выражение x^4+3x^2-x+3 при любых x принимает положительные значения, надо показать, что квадратный трехчлен $3x^2-x+3$ всегда положителен.

Чтобы найти наибольшее значение выражения

$$\frac{10}{x^2+y^2+4x-6y+14},$$

нужно представить эту дробь в виде

$$\frac{10}{(x+2)^2+(y-3)^2+1}$$

и воспользоваться тем, что выражение вида a^2 принимает наименьшее значение при $a=0$. Похожим образом обстоит дело с заданием, в котором нужно найти наименьшее значение суммы

$$\sqrt{2x-2y+10}+\sqrt{x+3y-3}.$$

Так как выражение вида $\sqrt{a}$ принимает наименьшее значение при $a = 0$, то необходимо, чтобы одновременно равнялись нулю подкоренные выражения $2x - 2y + 10$ и $x + 3y - 3$.

Факт существования наименьшего значения у функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a > 0$, используется и при доказательстве того, что уравнение $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 4x + 5) = 1$ не имеет корней. В самом деле, наименьшее значение каждого из этих двух квадратных трехчленов равно 1, но достигается оно при разных значениях x.

Пример 3. Имеются два раствора одной и той же соли разной концентрации — 35% и 60%. В каком отношении надо взять первый и второй растворы, чтобы получить раствор, концентрация которого 40%?

Пусть x масса первого раствора, y — масса второго раствора (выраженные в одних единицах). Тогда, количество соли в первом растворе составляет $0{,}35x$, а во втором — $0{,}6y$. Масса нового раствора равна $x + y$, а количество соли в нем $0{,}4(x + y)$. Получаем уравнение:

$$0{,}35x + 0{,}6y = 0{,}4(x + y);$$
$$35x + 60y = 40x + 40y;$$
$$x = 4y;$$
$$\frac{x}{y} = 4.$$

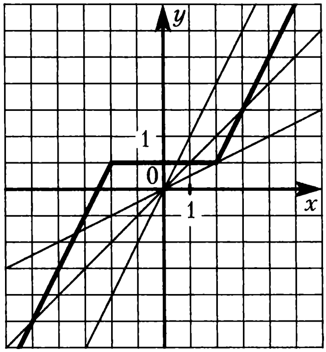
Ответ: первый и второй растворы надо взять в отношении $4:1$.

Решая задачу, мы получили одно уравнение с двумя переменными, но при этом смогли ответить на вопрос, так как надо было найти не конкретные значения x и y, а их отношение. Вообще, при решении многих текстовых задач возникают аналогичные ситуации — уравнений получается меньше, чем переменных. Но в таких задачах, как правило, вопрос ставится таким образом, что находить значения всех величин, обозначенных буквами, не требуется. Постановка вопроса в таких задачах обычно такова: найти отношение величин, их сумму, натуральные решения и др.

Пример 4. Найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ пересекает в трех различных точках ломаную, заданную условиями

$$y = \begin{cases} 2x + 5, \text{если } x < -2, \\ 1, \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ 2x - 3, \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Построим заданную ломаную и проведем «граничные» прямые, которые задаются уравнениями $y = kx$.



Одна из этих прямых проходит через точку (2; 1), а вторая параллельна прямым $y = 2x + 5$ и $y = 2x - 3$. Уравнение первой прямой $y = \frac{1}{2}x$, второй — $y = 2x$. Из рисунка видно, что все прямые, проходящие через начало координат, находящиеся «между» этими двумя прямыми, пересекают ломаную в трех точках.

Ответ: $\frac{1}{2} < k < 2$.

В задачах, где уравнения, формулы содержат буквенные коэффициенты, часто можно использовать графические соображения, как это было сделано в рассмотренном примере. Например, пусть требуется найти все значения a, при которых неравенство

$$x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1 \leqslant 0$$

не имеет решений. Рассуждать можно так. График трехчлена в левой части неравенства — это парабола, ветви которой направлены вверх. Переформулируем поставленный вопрос: нужно найти все значения a, при которых парабола расположена выше оси x. Теперь понятно, что нужно решить неравенство $D < 0$. Опираясь точно так же на наглядные представления, можно рассуждать иначе: вершина параболы должна находиться в верхней полуплоскости, поэтому задача сводится к решению неравенства $y_0 > 0$, где y_0 — ордината вершины параболы.

Как уже говорилось, многие задания допускают разные способы решения. Даже текстовые задачи, для которых основным способом решения является алгебраический, в ряде случаев могут быть решены арифметически.

Пример 5. Решим задачу. Автобус отправился из пункта A в пункт B. Одновременно навстречу ему из B в A выехал велосипедист. Через 40 мин они встретились, и каждый продолжил движение в своем направлении. Автобус прибыл в пункт B через 10 мин после встречи. Через какое время после встречи прибыл в A велосипедист?

Будем рассуждать так. На путь после встречи автобус затратил в 4 раза меньше времени, чем на путь до встречи. Если точку встречи обозначить буквой C, то из сказанного следует, что AC в 4 раза больше, чем BC. Значит, велосипедист после встречи проехал расстояние, в 4 раза большее, чем до встречи, а значит, он затратил на него $40 \cdot 4 = 160$ (мин).

Ответ: через 2 ч 40 мин.

2.2. О результатах выполнения экзаменационных заданий

В базовую часть экзаменационной работы включаются задания по следующим содержательным блокам: числа; выражения; преобразование выражений; уравнения; неравенства; последовательности; графики и функции. Остановимся на каждом из этих блоков с целью охарактеризовать особенности усвоения соответствующего материала учащимися.

Числа

Хотя арифметические вопросы изучаются преимущественно в 5—6 классах, этот содержательный блок выделен как самостоятельный для первой части экзаменационной работы. Это связано с тем, что к данному блоку относится большой объем материала, на котором формируются базовые знания и умения в основной школе. В отличие от традиционного понимания, проверка подготовки учащихся по теме «Числа» не сводится здесь к непосредственной проверке владения вычислительными алгоритмами. Акцент, прежде всего, делается на идейно-понятийную сторону, а также на практико-ориентированное знание. Так, проверяется знание и понимание терминологии, умение пользоваться эквивалентными представлениями чисел, сравнивать числа, выполнять оценку и прикидку результатов вычислений, процентные вычисления и т.д.

Что касается владения вычислительными навыками, то они никогда не проверяются отдельно, а лишь в контексте решения некоторой задачи.

Как показывает результаты экзаменов, с заданиями этого блока учащиеся справляются неплохо: процент выполнения большинства заданий находятся в диапазоне от 75 до 95, при этом незначительна доля учащихся, не приступивших к выполнению того или иного задания. Вместе с тем, анализ результатов экзамена за несколько лет его проведения позволил выявить некоторые недостатки в подготовке учащихся.

Так, значительная часть учащихся не владеет ключевой терминологией. Например, учащимся предлагалось определить, какое из чисел $\sqrt{400}$, $\sqrt{4000}$, $\sqrt{0{,}4}$ является рациональным (аналогично во втором варианте — иррациональным). Ответы показали, что от 20% до 30% учащиеся не владеют терминами «рациональное число» и «иррациональное число».

Почти 20% девятиклассников не могут сравнить два рациональных числа — обыкновенную и десятичную дроби (например, 0,82 и $\frac{7}{8}$), то есть почти пятая часть школьников, «поднявшись до высот» темы «Действительные числа», не владеет элементарным базовым умением.

Ряд заданий приводит к необходимости выполнять вычисления с положительными и отрицательными числами. Опыт показывает, что у значительной части выпускников основной школы соответствующие умения недостаточно стойкие. Так, при вычислении значений выражений $\sqrt{1-\frac{3}{4}}$ и $\sqrt{-\frac{3}{4}+1}$ результат во втором случае оказался на 15% хуже, чем в первом.

Всегда существенно хуже результаты выполнения заданий этого блока, которые связаны с практическим применением полученных знаний.

Что же касается заданий, связанных с понятийным аспектом, или с решением задач, которые не сводятся к непосредственному применению алгоритма, то они вызывают определенные трудности у многих учащихся. Вот пример одной из задач:

«Население России составляет $1{,}4 \cdot 10^8$ человек, ее территория равна $1{,}7 \cdot 10^7$ км^2. Сколько среднем приходится жителей на 1 км^2?

1) 0,12 чел. 2) 0,8 чел. 3) 1,2 чел. 4) 8 чел.»

Результаты показали, что 35—40% выпускников 9-х классов не смогли справиться с этим заданием. Часть учащихся не сумели разобраться в простейшей арифметической задаче — определить, какое отношение следует взять. Другие ошиблись при определении порядка числа, которое является значением частного, т.е. не смогли справиться с вычислением, постоянно применяющимся, например, при изучении физики.

При выполнении следующей задачи учащиеся должны были продемонстрировать понимание смысла записи $x = a \pm h$:

«На рулоне обоев имеется надпись $l = (20 \pm 0{,}1)$ м, где l — длина рулона обоев. В каких границах заключено точное значение длины рулона при этом условии?

1) $19 < l < 21$ 2) $19 < l < 20$

3) $19{,}9 < l < 20$ 4) $19{,}9 < l < 20{,}1$»

Выясняется, что некоторые учащиеся не могут сделать всего один шаг — перевести эту запись на язык неравенств (обращаем внимание на то, что надо было просто выбрать нужное неравенство из предложенных). Вместе с тем для такого понимания учащемуся, изучившему курс алгебры основной школы, и, в частности, тему «Неравенства», требуется только здравый смысл.

В первой части экзамена всегда присутствует задача, направленная на проверку владения понятием процента, умения выполнять процентные вычисления. Несмотря на то, что в регионах, участвующих в проведении экзамена не первый год, наметилась положительная тенденция, все же задания этой группы остаются наиболее трудными. Анализ ответов позволяет дать некоторый перечень ошибочных представлений школьников, которые следует иметь в виду в практике преподавания. Например, при решении задачи, на сколько процентов изменилось количество книг в библиотеке, если их было 50 тыс., а стало 56 тыс., учащиеся указывают в качестве ответа разность рассматриваемых величин, отождествляя, по-видимому, обороты речи «на сколько изменилась величина» и «на сколько процентов изменилась величина». Кроме того, считают ответом в этой задаче частное от деления большего числа на меньшее, а также, выразив нужное отношение десятичной дробью, «забывают» умножить ее на 100 (например, указывают 0,05% вместо 5%).

Выражения, преобразование выражений

Можно отметить, что в принципе учащиеся хорошо справляются с нахождением значения выражения с переменной при заданном значении переменной, с составлением буквенного выражения по условию задачи, с выражением из формулы одной величины через другие.

Один из наиболее трудных видов заданий этого блока — это задания на владение понятием области определения рационального выражения. Вот пример такого задания:

«Соотнесите выражение с множеством значений переменной c, при которых оно имеет смысл.

А. $\frac{2}{(4-c)(3+c)}$ Б. $\frac{(4-c)(3+c)}{2}$ В. $\frac{4-c}{3+c}$

1) $c \neq -3$ 2) $c \neq 4$

3) $c \neq -3$ и $c \neq 4$ 4) c — любое число»

Независимо от того, какие выражения рассматриваются, какова постановка вопроса и форма ответа (с выбором ответа, на соотнесение, с кратким ответом), результаты бывают невысокими (до 40% не справляются с такими заданиями). Понятно, что если выпускник не владеет понятием области определения рационального выражения, одним из базовых понятий курса алгебры, то трудности у него при изучении других видов выражений в старшем звене будут непреодолимыми.

Ниже, чем хотелось бы, результаты выполнения заданий на вычисления по формулам, причем даже по таким, которые буквально взяты из «повседневной жизни». Например, предлагается вычислить расстояние до эпицентра грозы по формуле $S = 330t$, где S — расстояние в метрах, t — число секунд, прошедших между вспышкой молнии и громом, при заданном значении t; ответ требуется выразить в километрах, округлив его до целых. И хотя решение состоит из элементарных действий, которые выпускник 9 класса, безусловно, обязан выполнять, от 20% до 40% учащихся не могут этого сделать. Снижает результаты и элементарное требование перевести метры в километры. Это еще раз говорит о необходимости усиления внимания к осознанной работе с текстами, с фабульными задачами.

Около 20% учащихся не справляются с заданием на составление буквенного выражения по условию текстовой задачи, в котором фигурируют проценты. Например, такая задача: «Товар стоил x р. Сколько он стал стоить после снижения цены на 40%?». При этом многие ограничиваются лишь первым действием и выбирают ответ $0{,}4x$ вместо $x - 0{,}4x$.

Внимание в экзамене к понятийной стороне в подготовке учащихся не означает, что учащиеся не должны владеть техникой алгебраических преобразований. Другое дело, что на базовом уровне требования должны ограничиваться потребностями базового курса математики старшей школы. Например, в заданиях на разложение многочленов на множители учащиеся должны уметь вынести общий множитель за скобки или воспользоваться формулой сокращенного умножения; владение методом группировки на базовом уровне не проверяется. Преобразование дробного выражения предусматривает выполнение не более, чем одного или двух действий. Преобразование иррациональных выражений, даже самых простых, не предполагается; учащиеся должны владеть только некоторыми простейшими приемами преобразования числовых выражений, содержащих радикалы.

Однако, несмотря на «скромный» уровень требований и значительное время, затрачиваемое на изучение соответствующего материала, результаты показывают существенные недостатки в владении формально-оперативными навыками. Наиболее низкие результаты (не выше 60%) учащиеся показывают при выполнении преобразований простейших дробных выражений. Кроме того, если с выполнением основных действий со степенями с целым показателем учащиеся справляются вполне удовлетворительно, то те же действия в контексте чисел, записанных с помощью степеней числа 10, вызывают у многих значительные затруднения.

Уравнения и неравенства

Имеются определенные проблемы, требующие особого внимания, и по данному блоку. Так, например, процент верных ответов при решении полного квадратного уравнения снижается, если первый коэффициент является дробным (например, $\frac{1}{3}x^2 + x - 6 = 0$). Умение перейти от дробных коэффициентов к целым, безусловно, относится к числу значимых. Вообще, всегда, когда в том или ином контексте возникает необходимость работать с дробями, у учащихся возникают трудности.

Более 30% учащихся не могут решить базовую, стандартную задачу, присутствующую во всех учебниках и традиционно включаемую в тематические и итоговые проверки: вычислить координаты точки пересечения двух прямых с помощью решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными.

Наибольшую трудность для учащихся представляет составление уравнения по условию текстовой задачи. Могут сделать это от 55 до 75%, в зависимости от типа задачи. Заслуживает внимания следующий факт: если по одной и той же задаче предложить учащимся составить уравнение и систему уравнений, то во втором случае результаты будут лучше. Это известный методический факт: перевод фабулы задачи на алгебраический язык легче, если вводить столько переменных, сколько неизвестных в задаче. Однако здесь надо помнить и другое. Как показывают и практика, и результаты экзаменов, решить систему уравнений для многих учащихся труднее, чем уравнение.

При решении линейных неравенств основной трудностью остается деление обеих частей неравенства на отрицательное число: с решением неравенства, где требовалось выполнить эту операцию, учащиеся справляются значительно хуже, чем неравенства, в котором выполнялось деление на положительное число. Но наибольшую трудность, как и прежде, вызывает у выпускников решение систем линейных неравенств, причем, даже в наиболее простых случаях.

Наиболее трудным заданием в теме «Неравенства» является решение квадратного неравенства. Четверть выпускников не справляется с простейшей ситуацией: $x^2 > a$ ($x^2 < a$). Ошибки и в том, и в другом случае одни и те же. Наиболее типичная ошибка состоит в том, что учащиеся формально «извлекают» квадратный корень из левой и правой частей неравенства. В результате, при решении, например, неравенства $x^2 > 64$ получают ответ $x > 8$. Другая типичная ошибка состоит в том, что учащиеся указывают множество решений, соответствующее неравенству противоположного знака.

Интересно отметить, что с заданием решить квадратное неравенство по готовому графику учащиеся справляются существенно лучше, чем в стандартной постановке вопроса. Это позволяет предположить, что значительная часть учащихся способна интерпретировать график квадратичной функции на языке неравенств, и проблема заключается или в неумении применить полный алгоритм решения квадратного неравенства, или в существующей практике обучения решению этого вида неравенств методом интервалов, который недоступен значительной части школьников на данном этапе.

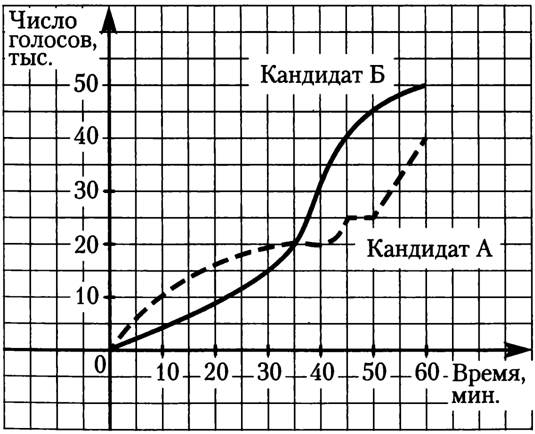
Функции и графики

Для заданий этого блока характерными являются две особенности: направленность на проверку системности знаний и умения применять функциональные представления для решения задач практического содержания.

В первой части экзамена отсутствуют задания на построение графиков функций, в силу того, что они дают мало информации о подготовке выпускника по данной теме курса. Акцент сделан на проверку обобщенных знаний — расположение графика функции в координатной плоскости в зависимости от значений коэффициентов, входящих в формулу, распознавание графиков функций разных видов, представление о некоторых общих свойствах функций и их графическом проявлении. Что же касается заданий на построение графиков, то они предлагаются практически ежегодно во второй части экзаменационной работы, причем не на самом элементарном уровне.

По мере накопления опыта подготовки учащихся к экзамену улучшаются результаты выполнения заданий на чтение графика реальной зависимости. Вот пример такого задания:

«На графиках показано, как во время телевизионных дебатов между кандидатами А и Б телезрители голосовали за каждого из них. Сколько всего телезрителей проголосовало к 40-й минуте дебатов?



1) 20 тыс. чел. 2) 30 тыс. чел. 3) 50 тыс. чел. 4) 45 тыс. чел.»

Заметим, что формирование такого общекультурного умения, как «чтение» реальных графиков (в элементарных, бытовых ситуациях), не требует больших затрат времени, и может быть достигнуто лишь путем некоторого акцента на соответствующий вид деятельности в ходе преподавания.

В то же время другие важнейшие умения, связанные с функциями и их графиками, требуют более серьезного внимания и методической работы.

Четверть учащихся допускают ошибки при чтении графика квадратичной функции. Анализ выбора ответов девятиклассниками при выполнении соответствующих заданий показывает, что неверные представления связаны со всем спектром заложенных в дистракторах ошибок. Так, учащиеся указывают в качестве наименьшего (или наибольшего) значения квадратичной функции ординату точки пересечения с осью y, ошибаются в геометрической трактовке записи типа $f(-3) = 0$, в определении промежутков знакопостоянства. Но наиболее часто учащиеся затрудняются при указании промежутков возрастания или убывания квадратичной функции.

От 20% до 30% школьников не могут определить, какой из графиков функций, например, $y = 3x - 3$, $y = 3x$, $y = -3x^2$, $y = 3x^2 + 3x$ не проходит (или проходит) через начало координат. Учащиеся могут рассуждать при выполнении этого задания разными способами: кто-то может ответить на вопрос, имея представление о том, как выглядят данные графики, а тот, кто не владеет таким представлением, может подставить координаты точки (0; 0) в формулу и выполнить простейшие вычисления. Такое умение составляет основу всей работы с графиками функций и, безусловно, входит в минимальный набор базовых умений, поэтому полученный результат хуже, чем следует ожидать. Безусловно, что те школьники, которые не могут ответить на данный вопрос, будут испытывать серьезные затруднения при изучении курса алгебры и начал анализа в старших классах.

Порядка 20—30% учащихся затрудняются при соотнесении графиков функций вида $y = kx$ с формулами, например, когда им надо из четырех предложенных графиков (прямые, проходящие через начало координат) выбрать тот, на котором изображен график конкретной функции (например, $y = -\frac{1}{2}x$), или когда для каждой из трех формул, задающих функцию, надо указать соответствующий ей график. При этом форма задания не оказывает влияния на результат его выполнения.

Низкие результаты наблюдаются при выполнении заданий на установление взаимного расположения в координатной плоскости параболы $y = x^2 + c$ и прямой $y = a$ (при конкретных значениях c и a). Вместе с тем, хорошие представления о соответствующих графиках, на проверку которых направлено это задание, также абсолютно необходимы для изучения элементов математического анализа в старшем звене.

Для выполнения заданий, в которых требуется соотнести график функции и формулу, задающую эту функцию, учащихся следует вооружить некоторыми приемами распознавания. Например, можно соотнести наклон прямой и знак углового коэффициента, направление ветвей параболы и знак коэффициента при x^2, ординату точки пересечения графика с осью у и начальную ординату, вычисленную по формуле, и др. Чем больше у ученика знаний о конкретной функции, тем больше приемов распознавания он сможет использовать.

Последовательности и прогрессии

В заданиях по этому блоку акцент сделан на понятийной стороне изучаемого вопроса, на владении математическим языком, используемым в этой теме. Нередки случаи, когда учащиеся, «пройдя» тему «Прогрессии», не владеют индексными обозначениями, не могут перевести на естественный язык рекуррентное соотношение, не понимая его содержательного смысла, иными словами усваивают тему чрезвычайно формально, не овладевая ее общеобразовательной составляющей.

Для решения задач, включаемых в экзамен, достаточно владеть терминологией и символикой, знать основные формулы, понимать смысл основных понятий и прибегать к здравому смыслу.

Прежде всего, учащихся затрудняют базовые, основополагающие задания на распознавание арифметической и геометрической прогрессий при разных способов заданий: перечислением первых нескольких членов, рекуррентной формулой, формулой n-го члена (от 20 до 30% учащихся не справляются с заданиями такого рода).

Вообще, если в задании предложена рекуррентная формула, то результат обычно ниже ожидаемого, хотя решение таких заданий всегда сводится просто к вычислению по приведенной формуле нескольких членов последовательности. Примерно половина учащихся в некоторых территориях не знает, как работать с данной формулой. А ведь именно рекуррентным способом определяются арифметическая и геометрическая прогрессии.

3. ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ

3.1. Первая часть экзаменационной работы

В этом параграфе приводятся тренировочные задания по следующим содержательным блокам: числа, буквенные выражения, преобразование буквенных выражений, уравнения, неравенства, последовательности и прогрессии, функции.

Числа

Задания данного раздела направлены на проверку владения следующими знаниями и умениями:

— знать и понимать термины, обозначающие различные виды чисел: натуральное число, целое, рациональное, иррациональное и др.; переходить от одной формы записи числа к другой;

— сравнивать и упорядочивать обыкновенные и десятичные дроби, рациональные и иррациональные числа; оценивать квадратные корни целыми числами;

— знать и понимать термины, связанные с делимостью чисел, применять простейшие свойства и признаки делимости;

— понимать и использовать в ходе решения задач соответствие между числами и точками координатной прямой; осуществлять перевод с геометрического языка на арифметический и наоборот;

— понимать и интерпретировать буквенную запись свойств действий над числами, отношений между числами;

— понимать и использовать в ходе решения задач запись больших и малых чисел с помощью степеней числа 10; выполнять действия с числами, записанными в стандартном виде;

— владеть понятием процента, выражать доли величины в процентах и проценты — в долях; оперировать понятием процента в задачах с практическим содержанием;

— решать текстовые задачи на дроби, проценты, отношения, прямую и обратную пропорциональность;

– округлять значения величин, выраженные целыми числами и десятичными дробями, понимать смысл основных форм записи приближенных значений ($x = 2{,}5 \pm 0{,}1$, $x \approx 2{,}5$), выполнять прикидку и оценку результатов вычислений.

1. а) Расположите в порядке возрастания числа 0,0157; 0,105; 0,07.

1) 0,07; 0,105; 0,0157 3) 0,105; 0,07; 0,0157
2) 0,0157; 0,105; 0,07 4) 0,0157; 0,07; 0,105

б) Расположите в порядке убывания числа 0,0216; 0,12; 0,016.

1) 0,0216; 0,016; 0,12 3) 0,12; 0,0216; 0,016
2) 0,016; 0,0216; 0,12 4) 0,12; 0,016; 0,0216

2. а) Какому из данных промежутков принадлежит число $\frac{2}{9}$?

1) [0,1; 0,2] 2) [0,2; 0,3] 3) [0,3; 0,4] 4) [0,4; 0,5]

б) Какому из данных промежутков принадлежит число $\frac{7}{9}$?

1) [0,5; 0,6] 2) [0,6; 0,7] 3) [0,7; 0,8] 4) [0,8; 0,9]

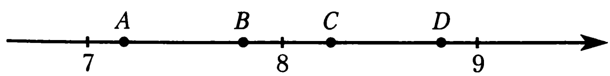
3. а) Какое из чисел $\sqrt{121}$, $\sqrt{0{,}4}$, $\sqrt{2\frac{7}{9}}$ является иррациональным?

1) $\sqrt{121}$ 2) $\sqrt{0{,}4}$ 3) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$ 4) все эти числа

б) Какое из чисел $\sqrt{6{,}4}$, $\sqrt{0{,}81}$, $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ является иррациональным?

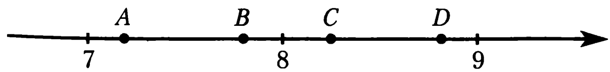
1) $\sqrt{6{,}4}$ 2) $\sqrt{0{,}81}$ 3) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ 4) все эти числа

4. а) Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{68}$. Какая это точка?



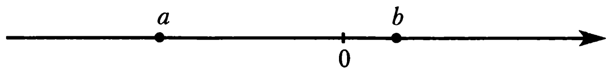
1) точка A 2) точка B 3) точка C 4) точка D

б) Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{77}$ Какая это точка?



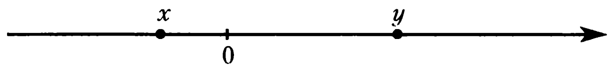
1) точка A 2) точка B 3) точка C 4) точка D

5. а) На координатной прямой отмечены числа a и b. Какое из следующих утверждений является верным?



1) $a + b > 0$ 2) $ab > 0$ 3) $a(a + b) > 0$ 4) $b(a + b) > 0$

б) На координатной прямой отмечены числа x и y. Какое из следующих утверждений является верным?



1) $xy > 0$ 2) $x + y < 0$ 3) $y(x + y) < 0$ 4) $x(x + y) < 0$

6. а) Какое из указанных чисел не делится на 3?

1) 12852 2) 1143 3) 20293 4) 7239

б) Какое из указанных чисел не делится на 9?

1) 81234 2) 3219 3) 30159 4) 8883

7. а) Известно, что a и b — нечетные числа. Какое из следующих чисел также является нечетным?

1) $a + b$ 2) $2ab$ 3) $a(b + 1)$ 4) $a + b + 1$

б) Известно, что a и b — четные числа. Какое из следующих чисел также является четным?

1) $a + b + 1$ 2) $a(b + 1)$

3) $ab + 1$ 4) $(a + 1)(b + 1)$

8. а) На рулоне обоев имеется надпись, гарантирующая, что его длина равна $10 \pm 0{,}05$ м. Какую длину не может иметь рулон при этом условии?

1) 10 м 2) 9,98 м 3) 10,04 м 4) 9,92 м

б) На банке с краской имеется надпись, гарантирующая, что масса краски в ней составляет $3 \pm 0{,}05$ кг. Какой не может оказаться масса краски при этом условии?

1) 3,1 кг 2) 3 кг 3) 2,96 кг 4) 3,02 кг

9. а) Найдите десятичную дробь, равную $1{,}27\ 10^{-4}$

1) 0,0127 2) 0,00127 3) 0,000127 4) 0,0000127

б) Найдите десятичную дробь, равную $1{,}18 \cdot 10^{-5}$

1) 0,00000118 2) 0,0000118 3) 0,000118 4) 0,00118

10. а) Численность населения Китая составляет $1{,}3 \cdot 10^{9}$ человек, а Вьетнама — $8{,}5 \cdot 10^{7}$ человек. Во сколько раз численность населения Китая больше численности населения Вьетнама?

1) примерно в 6,5 раза
2) примерно в 150 раз
3) примерно в 15 раз
4) примерно в 1,5 раза

б) Площадь территории России составляет $1{,}7\ 10^{7}$ км², а Норвегии — $3{,}2 \cdot 10^{3}$ км². Во сколько раз территория России больше территории Норвегии?

1) примерно в 1,9 раза
2) примерно в 5,3 раза
3) примерно в 53 раза
4) примерно в 530 раз

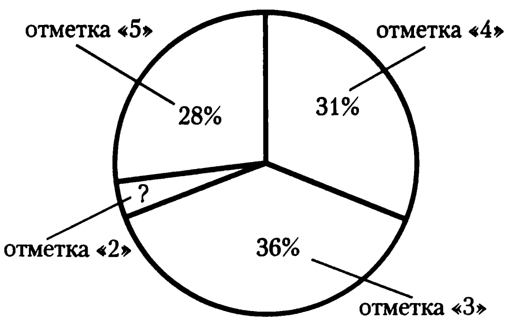
11. а) Расходы на одну из статей городского бюджета составляют 12,5%. Выразите эту часть бюджета десятичной дробью.

Ответ: ____________________

б) Содержание некоторого вещества в таблетке витамина составляет 7,5%. Выразите эту часть десятичной дробью.

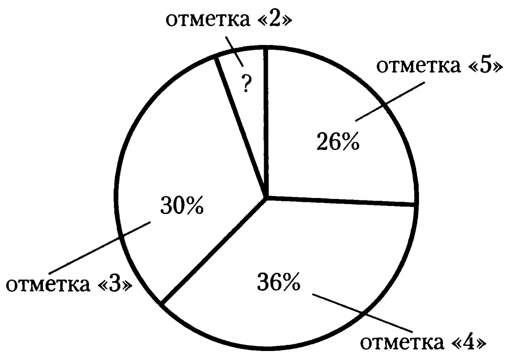
Ответ: ____________________

12. а) Результаты районной контрольной работы по алгебре в 9 классе представили в виде диаграммы. Сколько учащихся получили отметку «2», если всего работу писали 320 девятиклассников?



Ответ: ____________________

б) Результаты районной контрольной работы по физике в 9 классе представили в виде диаграммы. Сколько учащихся получили отметку «2», если всего работу писали 400 девятиклассников?



Ответ: ________________

13. а) Из объявления фирмы, проводящей обучающие семинары: «Стоимость участия в семинаре — 3000 р. с человека. Группам от организаций предоставляются скидки: от 3 до 10 человек — 5%; более 10 человек — 8 %». Сколько должна заплатить организация, направившая на семинар группу из 4 человек?

1) 11400 р. 2) 2850 р. 3) 600 р. 4) 12000 р.

б) Из объявления фирмы, проводящей обучающие семинары: «Стоимость участия в семинаре — 2000 р. с человека. Группам от организаций предоставляются скидки: от 2 до 5 человек — 3%; более 5 человек — 5 %». Сколько должна заплатить организация, направившая на семинар группу из 6 человек?

1) 600 р. 2) 1900 р. 3) 12000 р. 4) 11400 р.

14. а) После завершения регистрации на авиарейс оказалось, что число свободных мест в самолете относится к числу занятых, как 1 : 4. Сколько процентов всех мест в самолете занято?

1) 20% 2) 25% 3) 40% 4) 80%

б) После завершения регистрации на авиарейс оказалось, что число занятых мест в самолете относится к числу свободных, как 3 : 2. Сколько процентов всех мест в самолете свободно?

1) 20% 2) 40% 3) 50% 4) 60%

Буквенные выражения

Задания этого раздела направлены на проверку владения следующими знаниями и умениями:

знать и понимать термины: выражение, значение выражения, область определения выражения;

находить значение выражения с переменными при указанных значениях переменных;

находить область определения рационального выражения (целого, дробного), простейших выражений, содержащих переменные под знаком корня;

— составлять буквенные выражения и формулы по условиям, описанным в задаче, заданным рисунком или чертежом;

выполнять вычисления по формулам, выражать из формулы одну величину через другие.

1. а) Найдите значение выражения $\frac{a+b}{c}$ при $a = 8{,}4$; $b = -1{,}2$; $c = -4{,}5$.

Ответ: ____________________

б) Найдите значение выражения $\frac{a-b}{c}$ при $a = 2{,}5$; $b = 6{,}7$; $c = 2{,}4$.

Ответ: ____________________

2. а) Найдите значение выражения $1{,}5x^3 - 0{,}8x$ при $x = -1$.

Ответ: ____________________

б) Найдите значение выражения $0{,}6x - 1{,}5x^3$ при $x = -1$.

Ответ: ____________________

3. а) Найдите значение выражения $\frac{1-\sqrt{a}}{b}$ при $a = 0{,}64$; $b = 0{,}09$.

Ответ: ____________________

б) Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{b}}{1-\sqrt{c}}$ при $b = 0{,}04$; $c = 0{,}16$.

Ответ: ____________________

4. а) Соотнесите каждое выражение с множеством значений переменной, при которых оно имеет смысл.

А) $\dfrac{(a-1)(2-a)}{3}$ Б) $\dfrac{3}{(a-1)(2-a)}$ В) $\dfrac{a-1}{2-a}$

1) $a \neq 1$
2) $a \neq 2$
3) $a \neq 1$ и $a \neq 2$
4) a — любое число

Ответ:

А	Б	В

б) Соотнесите каждое выражение с множеством значений переменной, при которых оно имеет смысл.

А) $\dfrac{4-c}{3+c}$ Б) $\dfrac{(4-c)(3+c)}{2}$ В) $\dfrac{2}{(4-c)(3+c)}$

1) $c \neq -3$ и $c \neq 4$
2) $c \neq 4$
3) $c \neq -3$
4) c — любое число

Ответ:

А	Б	В

5. а) Даны выражения: 1) $\dfrac{a+3}{a}$; 2) $\dfrac{a}{a+3}$; 3) $\dfrac{a+\frac{3}{a}}{3}$. Какие из этих выражений не имеют смысла при $a = 0$?

1) Только 1 2) Только 3 3) 1 и 3 4) 1, 2 и 3

б) Даны выражения: 1) $\dfrac{a}{4-a}$; 2) $\dfrac{4-a}{a}$; 3) $a - \dfrac{4-a}{a}$. Какие из этих выражений не имеют смысла при $a = 0$?

1) Только 2 2) 1 и 2 3) 1 и 3 4) 2 и 3

6. а) При каком из указанных значений x выражение $\sqrt{12+3x}$ не имеет смысла?

1) при $x = 0$ 2) при $x = -6$ 3) при $x = -1$ 4) при $x = -4$

б) При каком из указанных значений x выражение $\sqrt{2x+10}$ не имеет смысла?

1) при $x = 0$ 2) при $x = -3$ 3) при $x = -5$ 4) при $x = -7$

7. а) Расстояние в метрах до эпицентра грозы можно приближенно вычислить по формуле $S = 330t$, где t — число секунд, прошедших между вспышкой молнии и ударом грома. Определите, на каком примерно расстоянии от эпицентра грозы находится наблюдатель, если $t = 12$. Ответ дайте в километрах, округлив его до целых.

Ответ: ____________________________

б) Расстояние в метрах до эпицентра грозы можно приближенно вычислить по формуле $S = 330t$, где t — число секунд, прошедших между вспышкой молнии и ударом грома. Определите, на каком примерно расстоянии от эпицентра грозы находится наблюдатель, если $t = 25$. Ответ дайте в километрах, округлив его до целых.

Ответ: ____________________________

8. а) Автомобиль расходует a литров бензина на 100 км пути. Сколько литров бензина потребуется, чтобы проехать 37 км?

1) $\frac{a \cdot 37}{100}$ л 2) $\frac{100 \cdot 37}{a}$ л 3) $\frac{a \cdot 100}{37}$ л 4) $\frac{a}{37\ 100}$ л

б) Автобус проехал x км, при этом расход топлива составил 27 литров. Сколько литров топлива потребуется, чтобы проехать 200 км?

1) $\frac{x \cdot 27}{100}$ л 2) $\frac{x \cdot 200}{27}$ л 3) $\frac{x}{27 \cdot 200}$ л 4) $\frac{27 \cdot 200}{x}$ л

9. а) Длина шага человека x см. По какой формуле можно вычислить число шагов n, которые ему надо сделать, чтобы пройти s метров?

1) $n = \frac{100s}{x}$ 2) $n = \frac{s}{100x}$ 3) $n = \frac{s}{x}$ 4) $n = 100sx$

б) Длина шага человека a см. По какой формуле можно вычислить расстояние s (в метрах), которое пройдет человек, сделав n шагов?

1) $s = an$ 2) $s = 100an$ 3) $s = \frac{an}{100}$ 4) $s = \frac{a}{100n}$

10. а) Из формулы пути равноускоренного движения $s = \frac{at^2}{2}$ выразите время t.

1) $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$ 2) $t = \sqrt{\frac{a}{2s}}$ 3) $t = \sqrt{\frac{s}{2a}}$ 4) $t = \frac{2s}{a}$

б) Площадь круга, диаметр которого равен d, вычисляется по формуле $S = \frac{\pi d^2}{4}$. Выразите из этой формулы диаметр d.

1) $d = \frac{4S}{\pi}$ 2) $d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}}$ 3) $d = \sqrt{\frac{\pi S}{4}}$ 4) $d = \sqrt{\frac{\pi}{4S}}$

Преобразование выражений

Задания этого раздела направлены на проверку владения следующими знаниями и умениями:

— знать и понимать термины: тождество, тождественно равные выражения, распознавать тождественно равные выражения, опираясь на правила преобразования выражений; понимать смысл требований упростите выражение, разложите на множители;

— выполнять преобразование выражений, содержащих степени с натуральными и целыми показателями;

— преобразовывать целые выражения, используя правила сложения, вычитания и умножения многочленов, в том числе, формулы сокращенного умножения;

— выполнять разложение многочленов на множители, используя вынесение общего множителя за скобки, а также формулы сокращенного умножения: выполнять разложение на множители квадратного трехчлена;

— сокращать дроби; выполнять сложение, вычитание, умножение, деление алгебраических дробей, преобразовывать несложные дробные выражения;

— выполнять преобразование числовых выражений, содержащих квадратные корни.

1. а) Для каждого выражения из верхней строки укажите тождественно равное ему выражение из нижней строки.

А) $a^{-8} \cdot a^2$ Б) $\frac{a^{-8}}{a^2}$ В) $(a^{-8})^2$

1) a^{-16} 2) a^{-10} 3) a^{-6} 4) a^{-4}

Ответ:

А	Б	В

б) Для каждого выражения из верхней строки укажите тождественно равное ему выражение из нижней строки.

А) $\frac{b^{-6}}{b^{-2}}$ Б) $(b^{-6})^{-2}$ В) $b^{-6} \cdot b^{-2}$

1) b^{12} 2) b^{3} 3) b^{-4} 4) b^{-8}

Ответ:

А	Б	В

2. а) Представьте выражение $\frac{x^{-8} \cdot x^{10}}{x^4}$ в виде степени с основанием x.

1) x^8 2) x^{-2} 3) x^{-6} 4) x^6

б) Представьте выражение $\frac{a^{-8}}{a^4 \cdot a^{-9}}$ в виде степени с основанием a.

1) a^4 2) a^7 3) a^{-13} 4) a^{-3}

3. а) Представьте значение выражения $\left(6 \cdot 10^{-3}\right)^2$ в виде десятичной дроби.

Ответ: ______________________________

б) Представьте значение выражения $\left(4 \cdot 10^{-2}\right)^3$ в виде десятичной дроби.

Ответ: ______________________________

4. а) В каком случае выражение преобразовано в тождественно равное?

1) $3(x - y) = 3x - y$ 2) $(3 + x)(x - 3) = 9 - x^2$

3) $(x - y)^2 = x^2 - y^2$ 4) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

б) В каком случае выражение преобразовано в тождественно равное?

1) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ 2) $(a + b)(b - a) = b^2 - a^2$

3) $(x - y)^2 = x^2 - y^2$ 4) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

5. а) Упростите выражение $6x + 3(x - 1)^2$

1) $3x^2 + 3$ 2) $3x^2 + 1$

3) $9x^2 - 6x + 9$ 4) $3x^2 + 6x - 3$

б) Упростите выражение $4(1 - a)^2 + 8a$.

1) $16a^2 - 24a + 16$ 2) $4 + 8x - 4a^2$

3) $4a^2 + 4$ 4) $a^2 + 4$

6. а) В выражении $4a^2 - 6ab$ вынесите за скобки множитель $-2a$.

1) $-2a(2a - 3b)$ 2) $-2a(2a - 6b)$

3) $-2a(3b - 2a)$ 4) $-2a(6b - 2a)$

б) В выражении вынесите $9ab - 6b^2$ за скобки множитель $-3b$.

1) $-3b(2b - 3a)$ 2) $-3b(3a - 6b)$

3) $-3b(3a - 2b)$ 4) $-3b(6b - 3a)$

7. а) Найдите второй множитель в разложении на множители квадратного трехчлена: $2x^2 + 5x - 3 = (x + 3)(...)$

Ответ: ______________________

б) Найдите второй множитель в разложении на множители квадратного трехчлена: $3x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(...)$

Ответ: ______________________

8. а) Сократите дробь $\frac{ab^2 - 2ab}{2ab}$.

1) ab^2 2) $\frac{b-2}{2}$ 3) $b^2 - a$ 4) $b - 1$

б) Сократите дробь $\frac{3ax}{3ax - ax^2}$.

1) $\frac{3}{3+x}$ 2) $\frac{1}{ax^2}$ 3) $\frac{1}{1+x}$ 4) $\frac{1}{x+ax}$

9. а) Укажите выражение, тождественно равное дроби $\frac{a-c}{b-c}$.

1) $\frac{c-a}{b-c}$ 2) $\frac{a-c}{c-b}$ 3) $\frac{c-a}{c-b}$ 4) $-\frac{c-a}{c-b}$

б) Укажите выражение, тождественно равное дроби $\frac{a-x}{b-x}$.

1) $\frac{x-a}{b-x}$ 2) $\frac{a-x}{x-b}$ 3) $-\frac{x-a}{x-b}$ 4) $-\frac{x-a}{b-x}$

10. а) Упростите выражение $\frac{1}{x} - \frac{x+y}{xy}$.

Ответ: ______________________

б) Упростите выражение $\frac{b}{c} - \frac{b^2+c^2}{bc}$.

Ответ: ______________________

11. а) Упростите выражение $\frac{a^2-9}{a^2+6a+9} \cdot (a+3)$.

Ответ: ______________________

б) Упростите выражение $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2} : (x-y)$.

Ответ: ______________________

12. а) Упростите выражение $\frac{2m-4m^2}{m-1}:\frac{2m^2}{m+1}$.

Ответ: ________________

б) Упростите выражение $\frac{n^2}{n+2}\cdot\frac{n+2}{n-3n^2}$.

Ответ: ________________

13. а) Упростите выражение $\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2\right)\cdot\frac{1}{a-c}$.

Ответ: ________________

б) Упростите выражение $\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cdot\frac{ab}{a+b}$.

Ответ: ________________

14. а) Выберите выражение, значение которого иррациональное число.

1) $\left(2\sqrt{3}\right)^2$ 2) $3\sqrt{2^6}$ 3) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{18}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$

б) Выберите выражение, значение которого иррациональное число.

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}}$ 3) $\left(2\sqrt{5}\right)^2$ 4) $5\sqrt{2^3}$

15. а) Найдите значение выражения $2\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}\cdot5\sqrt{26}$.

Ответ: ____________

б) Найдите значение выражения $3\sqrt{5}\cdot2\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}$.

Ответ: ____________

Уравнения

Задания этого раздела направлены на проверку владения следующими знаниями и умениями:

— знать и понимать термины: уравнение с одной переменной, корень уравнения; выяснять, является ли указанное число корнем данного уравнения;

— решать линейные и квадратные уравнения и уравнения, сводящиеся к ним в результате несложных преобразований; решать целые уравнения на основе условия равенства нулю произведения, несложные дробнорациональные уравнения;

проводить простейшее исследование квадратного уравнения (устанавливать, имеет ли уравнение корни и, если имеет, то сколько);

— знать и понимать термины: уравнение с двумя переменными», «решение уравнения с двумя переменными, график уравнения с двумя переменными; понимать графическую интерпретацию уравнения с двумя переменными, системы уравнений с двумя переменными;

— решать системы двух линейных уравнений с двумя переменными и несложные системы двух уравнений, одно из которых второй степени;

— составлять по условию текстовой задачи уравнение с одной переменной или систему уравнений с двумя переменными.

1. а) Какое из чисел является корнем уравнения $x^3 + 6x^2 + 3x - 10$?

1) 5 2) 2 3) –1 4) –5

б) Какое из чисел является корнем уравнения $x^3 - 6x^2 + 5x + 12$?

1) –4 2) –3 3) –1 4) 1

2. а) Решите уравнение $3 - 2x = 6 - 4(x + 2)$.

Ответ: ____________________

б) Решите уравнение $1 - 6(x - 2) = 14 - 8x$.

Ответ: ____________________

3. а) Решите уравнение $\frac{x}{2} - 3 = \frac{x}{5}$.

Ответ: __________________

б) Решите уравнение $\frac{x}{3} = \frac{x}{4} + 1$.

Ответ: __________________

4. а) Решите уравнение $\frac{1}{x+3} = \frac{4}{x-6}$.

1) 6 2) 3 3) –3 4) –6

б) Решите уравнение $\frac{4}{x-7} = \frac{1}{1-x}$.

1) –7 2) –1 3) 1 4) 7

5. а) Найдите корни уравнения $3x^2 + x = 0$.

Ответ: ___________________

б) Найдите корни уравнения $4x^2 - x = 0$.

Ответ: ___________________

6. а) Для каждого уравнения укажите число его корней, вписав в таблицу под каждой буквой соответствующий номер ответа:

А) $(x+1)^2 = 0$ Б) $x^2 + 1 = 0$ В) $x^2 + x = 0$ Г) $x^2 - x = 0$

1) один корень 2) два корня 3) нет корней

Ответ:

А	Б	В	Г

б) Для каждого уравнения укажите число его корней, вписав в таблицу под каждой буквой соответствующий номер ответа:

А) $x + 2x = 0$ Б) $x^2 + 2 = 0$ В) $(x-2)^2 = 0$ Г) $x^2 - 2x = 0$

1) один корень 2) два корня 3) нет корней

Ответ:

А	Б	В	Г

7. а) Какое из уравнений имеет иррациональные корни?

1) $x^2 - 3x - 4 = 0$ 2) $x^2 - 4x - 3 = 0$

3) $x^2 - 4x + 5 = 0$ 4) $x^2 - 4x + 4 = 0$

б) Какое из уравнений имеет иррациональные корни?

1) $x^2 - 2x + 4 = 0$ 2) $x^2 + 6x + 9 = 0$

3) $x^2 - 4x - 2 = 0$ 4) $x^2 - 5x + 6 = 0$

8. а) Решите уравнение $3x^2 - 8x - 3 = 0$.

Ответ: ____________________

б) Решите уравнение $4x^2 + 3x - 1 = 0$.

Ответ: ____________________

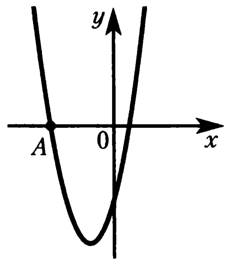
9. а) Найдите корни уравнения $(2x-5)(2+x) = 0$.

Ответ: ______________

б) Найдите корни уравнения $(2x+9)5 - x) = 0$.

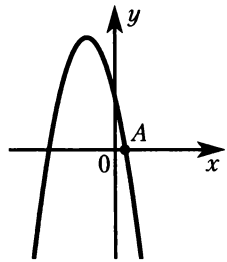
Ответ: ______________

10. а) На рисунке изображен график функции $y = 2x^2 + 3x - 2$. Вычислите абсциссу точки A.



Ответ: ______________________

б) На рисунке изображен график функции $y = -3x^2 - 5x + 2$. Вычислите абсциссу точки A.



Ответ: ______________________

11. а) Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ x - 6y = -2. \end{cases}$

Ответ: ______________________

б) Решите систему уравнений $\begin{cases} 5x - 4y = 12, \\ x - 5y = -6. \end{cases}$

Ответ: ______________________

12. а) Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -15. \end{cases}$

1) (5; –3), (–5; 3)
2) (–5; 7), (3; –1)
3) (5; –3), (–3; 5)
4) (–5; 7), (5; –7)

б) Решите систему уравнений $\begin{cases} xy = 12, \\ x - y = 4. \end{cases}$

1) (6; 2), (–6; –2)
2) (–2; –6), (6; 2)
3) (6; –2), (2; –6)
4) (–6; –10), (2; –2)

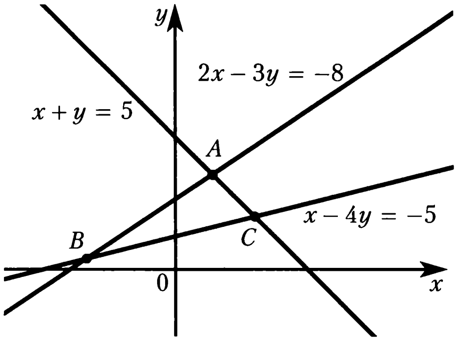
13. а) В какой координатной четверти находится точка пересечения прямых $2x - 3y = 1$ и $3x + y = 7$?

1) в I 2) во II 3) в III 4) в IV

б) В какой координатной четверти находится точка пересечения прямых $5x + 4y = -6$ и $x + 3y = 1$??

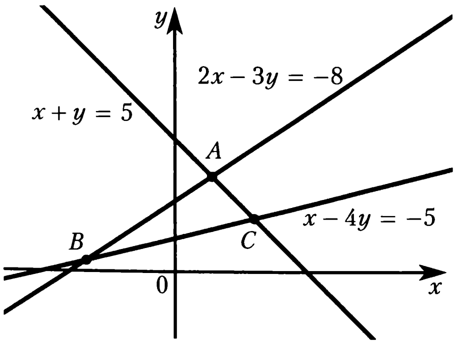
1) в I 2) во II 3) в III 4) в IV

14. а) Вычислите координаты точки A.



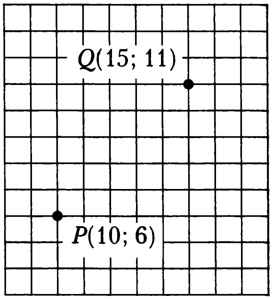
Ответ: ____________________

б) Вычислите координаты точки B.



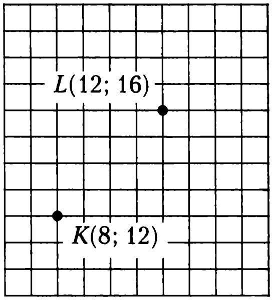
Ответ: ____________________

15. а) На координатной плоскости отмечены точки P и Q. Какое уравнение задает прямую, проходящую через эти точки?



1) $x + y = 16$
2) $x + y = 26$
3) $x - y = 4$
4) $x - y = 5$

б) На координатной плоскости отмечены точки K и L. Какое уравнение задает прямую, проходящую через эти точки?



1) $y + x = 28$
2) $y + x = 20$
3) $x - y = 4$
4) $y - x = 4$

16. а) Прочитайте задачу.

Расстояние между двумя пристанями по реке 17 км. Лодка проплыла от одной пристани до другой и вернулась обратно, затратив на весь путь 6 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

Обозначьте буквой x собственную скорость лодки (в км/ч) и составьте уравнение по условию задачи.

1) $\frac{17}{x+2} + \frac{17}{x-2} = 6$
2) $\frac{x+2}{17} + \frac{x-2}{17} = 6$
3) $\frac{17}{x+2} = \frac{17}{x-2} - 6$
4) $17(x+2) + 17(x-2) = 6$

б) Прочитайте задачу.

Лодка проплыла от одного причала до другого, расстояние между которыми 25 км, и вернулась обратно. На путь по течению лодка затратила на 1 ч меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки 8 км/ч.

Обозначьте буквой x скорость течения реки (в км/ч) и составьте уравнение по условию задачи.

1) $\frac{25}{8+x} - \frac{25}{8-x} = 1$ 2) $\frac{25}{8-x} - \frac{25}{8+x} = 1$

3) $25(8+x) - 25(8-x) = 1$ 4) $\frac{25}{x-8} - \frac{25}{x+8} = 1$

Неравенства

Задания этого раздела направлены на проверку владения следующими знаниями и умениями:

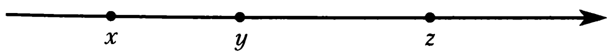
— знать и понимать алгебраическую трактовку отношений «больше» и «меньше» между числами; знать и применять свойства числовых неравенств;

— знать и понимать термины: решение неравенства с одной переменной, решение системы неравенств с одной переменной;

— решать линейные неравенства с одной переменной и их системы;

— находить множество решений квадратного неравенства с одной переменной, опираясь на графические соображения.

1. а) На координатной прямой отмечены числа x, y и z. Какая из следующих разностей положительна?



1) $x - y$ 2) $y - z$ 3) $z - y$ 4) $x - z$

б) На координатной прямой отмечены числа c, m и n. Какая из следующих разностей отрицательна?

1) $n - m$ 2) $m - c$ 3) $n - c$ 4) $c - m$

2. а) Какое из следующих неравенств **не следует** из неравенства $y - x > z$?

1) $y > x + z$ 2) $y - x - z < 0$

3) $z + x - y < 0$ 4) $y - z > k$

б) Какое из следующих неравенств **не следует** из неравенства $c > b - a$?

1) $a + c > b$ 2) $a > b - c$

3) $b - a - c > 0$ 4) $a - b + c > 0$

3. а) О числах a и c известно, что $a < c$. Какое из следующих неравенств неверно?

1) $a - 3 < c - 3$ 2) $a + 5 < c + 5$

3) $\frac{1}{4}a < \frac{1}{4}c$ 4) $-\frac{a}{2} < -\frac{c}{2}$

б) О числах p и q известно, что $p > q$. Какое из следующих неравенств неверно?

1) $6 + p > 6 + q$ 2) $\frac{p}{3} < \frac{q}{3}$

3) $p - 4 > q - 4$ 4) $-\frac{p}{5} < -\frac{q}{5}$

4. а) Решите неравенство $2 + x \leqslant 5x - 8$.

1) $(-\infty; 1{,}5]$ 2) $[1{,}5; +\infty)$ 3) $(-\infty; 2{,}5]$ 4) $[2{,}5; +\infty)$

б) Решите неравенство $x - 1 \leqslant 3x + 2$.

1) $[-1{,}5; +\infty)$ 2) $(-\infty; -1{,}5]$ 3) $[-0{,}5; +\infty)$ 4) $(-\infty; -0{,}5]$

5. а) Решите неравенство $2 + 3x > 1 - 5(x - 1)$.

Ответ: ____________________

б) Решите неравенство $2 - 3x < 3 - 5(x + 2)$.

Ответ: ____________________

6. а) Решите систему неравенств $\begin{cases} 6x + 3 < 0, \\ 7 - 4x < -1. \end{cases}$

1) $x < -0{,}5$ 2) $x < 2$

3) $-0{,}5 < x < 2$ 4) система не имеет решений

б) Решите систему неравенств $\begin{cases} 10 - 4x > 0, \\ 3x - 1 > 5. \end{cases}$

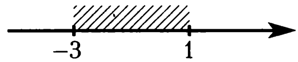
1) $x > 2{,}5$ 2) $x < -2{,}5$ 3) $2 < x < 2{,}5$ 4) $x > 2$

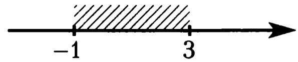
7. а) Для каждой системы неравенств укажите номер рисунка, на котором изображено множество ее решений.

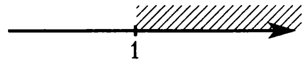
А) $\begin{cases} x \geqslant -1, \\ 3 - x \geqslant 0 \end{cases}$

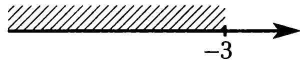
Б) $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x + 3 \leqslant 0 \end{cases}$

В) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ 1 - x \leqslant 0 \end{cases}$

1) 

2) 

3) 

4) 

Ответ:

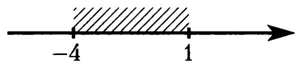
А	Б	В

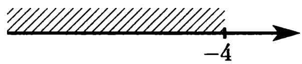
б) Для каждой системы неравенств укажите номер рисунка, на котором изображено множество ее решений.

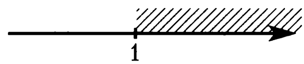
А) $\begin{cases} x \leqslant -4, \\ 1 - x \geqslant 0 \end{cases}$

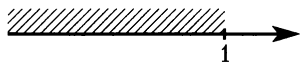
Б) $\begin{cases} x \geqslant -4, \\ 1 - x \leqslant 0 \end{cases}$

В) $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x + 4 \geqslant 0 \end{cases}$

1) 

2) 

3) 

4) 

Ответ:

А	Б	В

8. а) Решите неравенство $x^2 + x - 2 \leqslant 0$.

Ответ: ____________________

б) Решите неравенство $x^2 + 4x - 5 \leqslant 0$.

Ответ: ____________________

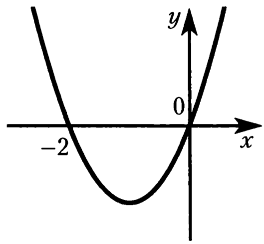
9. а) Укажите неравенство, решением которого является любое число.

1) $x^2+9<0$ 2) $x^2-9<0$ 3) $x^2+9>0$ 4) $x^2-9>0$

б) Укажите неравенство, которое не имеет решений.

1) $x^2-4>0$ 2) $x^2+4>0$ 3) $x^2-4<0$ 4) $x^2+4<0$

10. а) На рисунке изображен график функции $y=x^2+2x$. Используя график, решите неравенство $x^2>-2x$.



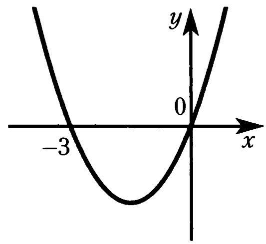
1) $(-2; 0)$

2) $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$

3) $(-\infty; -2)$

4) $(0; +\infty)$

б) На рисунке изображен график функции $y=x^2+3x$. Используя график, решите неравенство $x^2<-3x$.



1) $(-3; 0)$

2) $(-\infty; 0)$

3) $(-3; +\infty)$

4) $(-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$

Последовательности и прогрессии

Задания этого раздела направлены на проверку владения следующими знаниями и умениями:

— знать и понимать термины: последовательность, член последовательности, n-ый член последовательности, арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия; понимать и использовать индексные обозначения;

— находить члены последовательности, заданной формулой n-го члена или рекуррентным способом;

распознавать арифметические и геометрические прогрессии при различных способах задания, переходить от одного способа задания прогрессии к другому; применять формулы n-го члена и суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий для решения несложных задач, в том числе, из жизненной практики.

1. а) Последовательность задана условиями: $c_1 = -\frac{1}{5}$, $c_{n+1} = \frac{1}{c_n}$.

Найдите c_6.

Ответ: ______________________________

б) Последовательность задана условиями: $a_1 = -6$, $a_{n+1} = -\frac{1}{a_n}$.

Найдите a_7.

Ответ: ______________________________

2. а) Последовательность задана формулой $a_n = (-1)^n n$. Какое из следующих чисел **не является** членом этой последовательности?

1) –1 2) –4 3) –7 4) –9

б) Последовательность задана формулой $a_n = (-1)^n n$. Какое из следующих чисел не является членом этой последовательности?

1) 2 2) 4 3) 5 4) 8

3. а) Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них — арифметическая прогрессия. Укажите ее.

1) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4};$ 3) 1; 3; 5; 7;

2) 1; 2; 4; 8; 4) 1; 2; 3; 5;

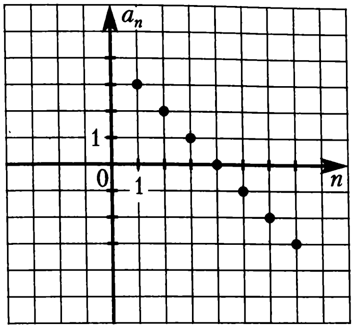
б) Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них — геометрическая прогрессия. Укажите ее.

1) $1; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4};$ 3) 1; 3; 5; 7;

2) 1; 2; 4; 8; 4) 1; 2; 3; 5;

4. а) Члены последовательности можно изображать точками на координатной плоскости. Для этого по горизонтальной оси откладывают номер члена, а по вертикальной — соответствующий член последовательности.

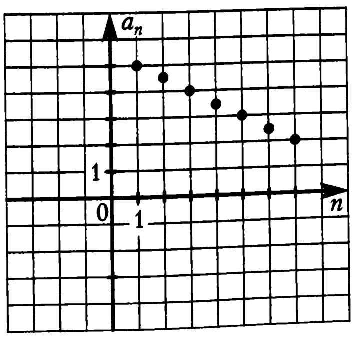
На рисунке изображены точками первые семь членов арифметической прогрессии (a_n). Найдите a_1 и d.



Ответ: ________________________

б) Члены последовательности можно изображать точками на координатной плоскости. Для этого по горизонтальной оси откладывают номер члена, а по вертикальной — соответствующий член последовательности.

На рисунке изображены точками первые семь членов арифметической прогрессии (a_n). Найдите a_1 и d.



Ответ: ________________________

5. а) Выписано несколько последовательных членов арифметической прогрессии: $11; x; -13; -25;$ Найдите член прогрессии, обозначенный буквой x.

Ответ: ____________________

б) Выписано несколько последовательных членов арифметической прогрессии: $-34; -18; x; 14;$ Найдите член прогрессии, обозначенный буквой x.

Ответ: ________________

6. а) Для каждой арифметической прогрессии, заданной формулой n-го члена, укажите ее разность d.

А) $a_n = 4n + 3$ Б) $b_n = 2n + 4$ В) $c_n = 3n - 2$

1) $d = -2$ 2) $d = 4$ 3) $d = 2$ 4) $d = 3$

Ответ:

А	Б	В

б) Для каждой арифметической прогрессии, заданной формулой n-го члена, укажите ее разность d.

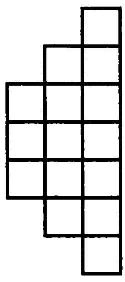
А) $a_n = 4n + 3$ Б) $b_n = 3n + 2$ В) $c_n = 2n - 4$

1) $d = -4$ 2) $d = 4$ 3) $d = 2$ 4) $d = 3$

Ответ:

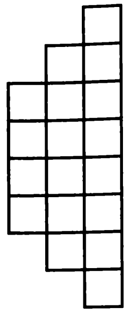
А	Б	В

7. а) Фигура составляется из квадратов так, как показано на рисунке: в каждом следующем столбце на 2 квадрата больше, чем в предыдущем. Сколько квадратов в столбце с номером n?



1) $n + 2$
2) $2n + 5$
3) $2n + 3$
4) $2n + 1$

б) Фигура составляется из квадратов так, как показано на рисунке: в каждом следующем столбце на 2 квадрата больше, чем в предыдущем. Сколько квадратов в столбце с номером n?



1) $2n + 2$
2) $2n + 4$
3) $2n + 6$
4) $n + 2$

8. а) Геометрическая прогрессия задана условиями: b_1 1, $b_{n+1} = 2b_n$. Какое из данных чисел является членом этой прогрессии?

1) 10 2) 16 3) 18 4) 24

б) Геометрическая прогрессия задана условиями: $b_1 = 1$, $b_{n+1} = 3b_n$. Какое из данных чисел является членом этой прогрессии?

1) 27 2) 22 3) 15 4) 12

9. а) Выписано несколько последовательных членов геометрической прогрессии (b_n): 24; 12; 6; Найдите b_6.

Ответ: ____________________

б) Выписано несколько последовательных членов геометрической прогрессии (c_n): $\frac{1}{54}$; $\frac{1}{18}$; $\frac{1}{6}$; Найдите c_6.

Ответ: ____________________

10. а) Геометрическая прогрессия задана условиями: $b_1 = 2$, $b_{n+1} = 3b_n$. Укажите формулу n-го члена этой прогрессии.

1) $b_n = 3 \cdot 2^{n-}$ 2) $b_n = 3 \cdot 2^n$ 3) $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ 4) $b_n = 2 \cdot 3^n$

б) Геометрическая прогрессия задана условиями: $b_1 = 5$, $b_{n+1} = 2b_n$. Укажите формулу n-го члена этой прогрессии.

1) $b_n = 5 \cdot 2^{n-}$ 2) $b_n = 5 \cdot 2^n$
3) $b_n = 5 \cdot 2n$ 4) $b_n = 5 \cdot 2(n - 1)$

Функции

Задания этого раздела направлены на проверку усвоения следующих знаний и умений:

— знать и понимать терминологию и символику, связанные с понятием функции: аргумент, значение функции, область определения функции, график функции, обозначение $f(x)$ и др.;

— переходить от аналитического языка описания функций к графическому и наоборот; понимать эквивалентность формулировок на разных языках, например, таких как «значение функции $y = f(x)$ при $x = a$ равно b» и «точка $(a; b)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$»;

— для функции, заданной формулой или графиком, находить по значению аргумента соответствующее значение функции и решать обратную задачу;

— по графику функции отвечать на вопросы, связанные со свойствами функции;

— распознавать графики изученных элементарных функций, соотносить их с формулами, задающими функции;

знать особенности расположения в координатной плоскости графиков некоторых функций в зависимости от значений параметров, входящих в формулы, а именно: функции $y = kx + b$ в зависимости от знаков k и b; функции $y = ax^2 + bx + c$ в зависимости от знаков a и D; функции $y = \frac{k}{x}$ в зависимости от знака k;

— применять функциональные представления для решения задач практического характера: выражать на функциональном языке зависимости между величинами; интерпретировать графики реальных зависимостей; решать несложные расчетные задачи по данным, «считанным» с графика зависимости между величинами.

1. а) Найдите значение функции $y = 20x^3 + 8x^2 - 1$ при значении аргумента, равном 0,1.

Ответ: ______________________

б) Найдите значение функции $y = 2 - 7x^2 + 30x^3$ при значении аргумента, равном $-0{,}1$.

Ответ: ______________________

2. а) Найдите область определения функции $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

1) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$
2) $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$
3) $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$
4) $(-\infty; +\infty)$

б) Найдите область определения функции $y = \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$.

1) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$
2) $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$
3) $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$
4) $(-\infty; +\infty)$

3. а) Какая из данных точек принадлежит графику функции $y = \dfrac{18}{x}$?

1) $A(-6; 3)$ 2) $B(8; 2)$ 3) $C(-3; -6)$ 4) $D(2; -8)$

б) Какая из данных точек принадлежит графику функции $y = -\dfrac{24}{x}$?

1) $A(-4; -6)$ 2) $B(-6; 4)$ 3) $C(4; 8)$ 4) $D(8; -4)$

4. а) Графиком какой из функций является парабола?

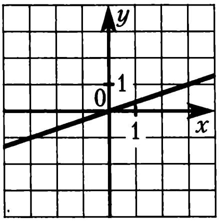
1) $y = \dfrac{5}{x}$
2) $y = -5x$
3) $y = -5x + 1$
4) $y = -5x^2 + 1$

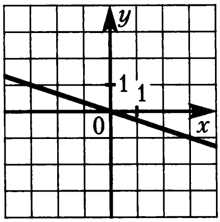
б) Графиком какой из функций является парабола?

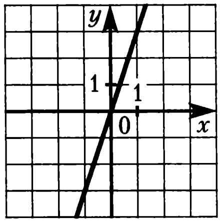
1) $y = 3x - 1$
2) $y = -3x$
3) $y = 3x^2 - 1$
4) $y = -\dfrac{3}{x}$

5. а) Каждую функцию, заданную формулой, соотнесите с графиком.

А) $y = 3x$ Б) $y = \frac{1}{3}x$ В) $y = -\frac{1}{3}x$

1) 

2) 

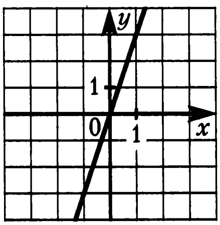
3) 

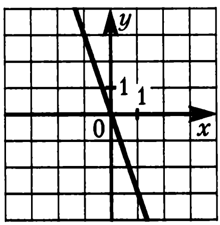
Ответ:

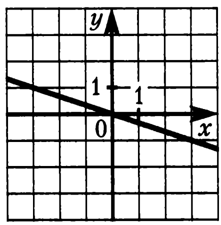
А	Б	В

б) Каждую функцию, заданную формулой, соотнесите с графиком.

А) $y = -3x$ Б) $y = 3x$ В) $y = -\frac{1}{3}x$

1) 

2) 

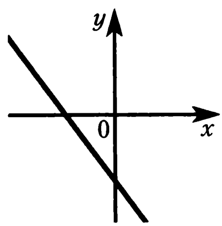
3) 

Ответ:

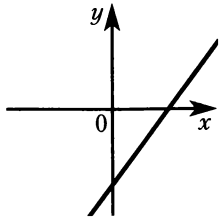
А	Б	В

6. а) На рисунке изображен график функции $y = kx + b$. Определите знаки коэффициентов k и b.

1) $k > 0,\ b > 0$
2) $k > 0,\ b < 0$
3) $k < 0,\ b > 0$
4) $k < 0,\ b < 0$



б) На рисунке изображен график функции $y = kx + b$. Определите знаки коэффициентов k и b.



1) $k > 0,\ b > 0$
2) $k > 0,\ b < 0$
3) $k < 0,\ b > 0$
4) $k < 0,\ b < 0$

7. а) Функции заданы формулами:

А) $y = 10x - 2$ Б) $y = -6x + 4$

В) $y = -7x$ Г) $y = 12x$

Какие из них являются возрастающими?

1) А и Б 2) А и Г 3) В и Г 4) А, Б и Г

б) Функции заданы формулами:

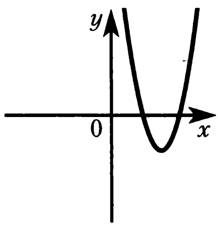
А) $y = 3 - 8x$ Б) $y = 10x + 4$

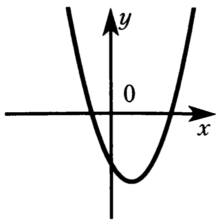
В) $y = -0{,}5x$ Г) $y = 2{,}5x$

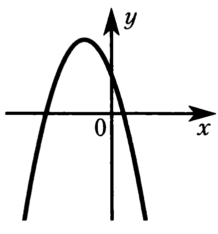
Какие из них являются убывающими?

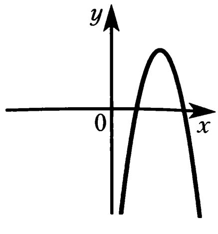
1) А и В 2) В и Г 3) только В 4) А, В и Г

8. а) Дана функция $y = ax^2 + bx + c$. На каком рисунке изображен график этой функции, если известно, что $a > 0$, и квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два корня разных знаков?

1)


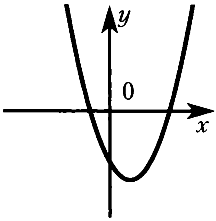
2)


3)


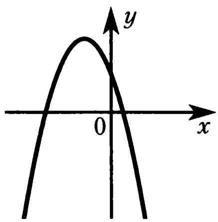
4)


б) Дана функция $y = ax^2 + bx + c$. На каком рисунке изображен график этой функции, если известно, что $a < 0$, и квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два положительных корня?

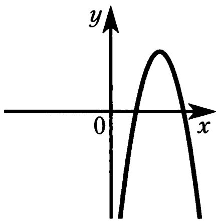
1)



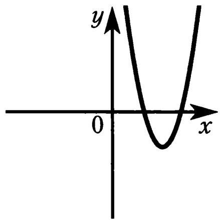
2)



3)



4)



9. а) Какая из прямых пересекает график функции $y = -\dfrac{6}{x}$ в одной точке?

1) $y = -3x$

2) $y = 2x$

3) $y = 1 - x$

4) $y = 3$

б) Какая из прямых пересекает график функции $y = \dfrac{3}{x}$ в двух точках?

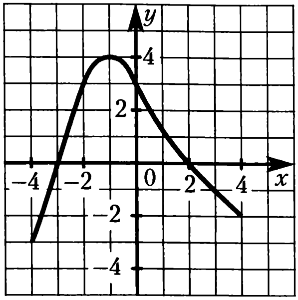
1) $y = 4$

2) $x = -2$

3) $y = x - 4$

4) $y = -2x$

10. а) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, областью определения которой является промежуток $[-4; 4]$. Используя рисунок, выясните, какое из утверждений **неверно.**



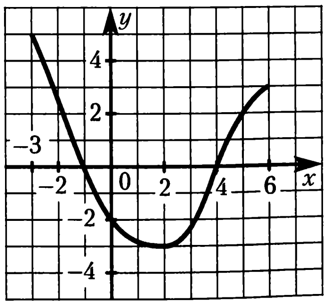
1) Если $x = -2$, то $f(x) = 3$.

2) $f(-3) < f(3)$.

3) Наибольшее значение функции равно 4.

4) Функция возрастает на промежутке $[-4; -1]$.

б) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, областью определения которой является промежуток $[-3; 6]$. Используя рисунок, выясните, какое из утверждений **неверно**.



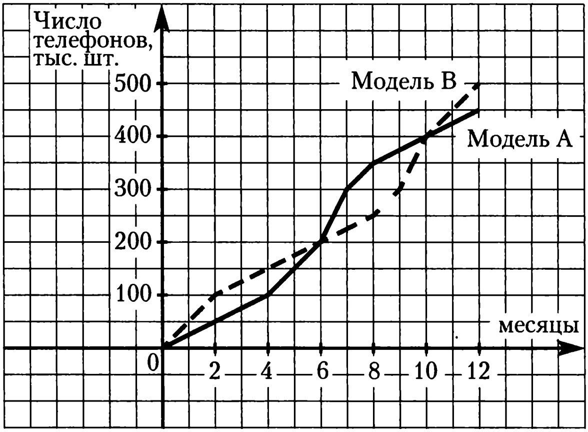
1) Функция убывает на промежутке $[-3; 2]$.

2) $f(-3) > f(5)$.

3) Наименьшее значение функции равно -2.

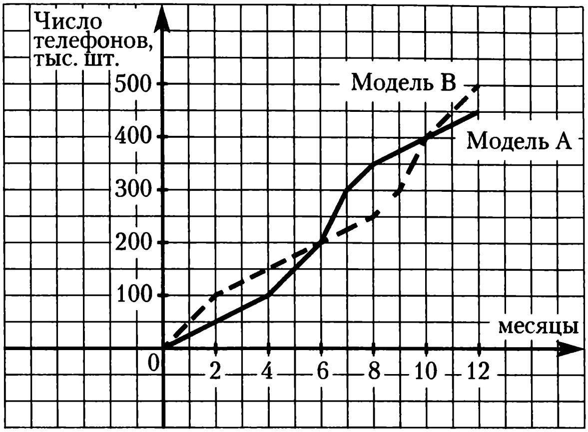
4) Нули функции — числа 4 и -1.

11. а) Фирма «Связь» выпустила в продажу две новые модели телефонов — модель A и модель B. На графиках показано, как эти модели продавались в течение года. (По горизонтальной оси откладывается время, прошедшее с начала продаж, в месяцах; по вертикальной — число телефонов, проданных за это время, в тыс. шт.) Телефонов какой модели было продано больше за последние 4 месяца, и на сколько больше?



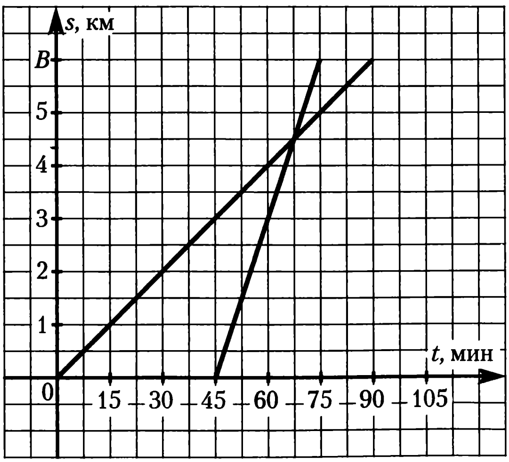
Ответ: ______________________________

б) Фирма «Связь» выпустила в продажу две новые модели телефонов — модель A и модель B. На графиках показано, как эти модели продавались в течение года. (По горизонтальной оси откладывается время, прошедшее с начала продаж, в месяцах; по вертикальной — число телефонов, проданных за это время, в тыс. шт.) Сколько всего телефонов этих двух моделей было продано за второе полугодие?



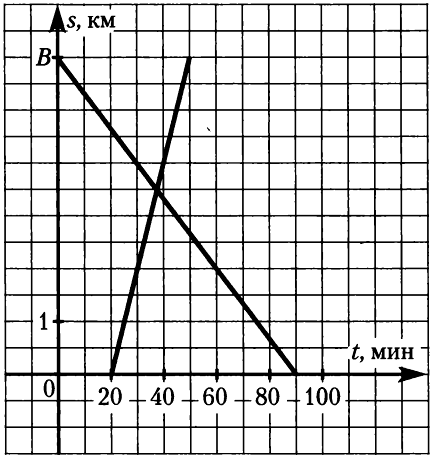
Ответ: ________________________

12. а) Из пункта A в пункт B вышел отряд туристов, и через некоторое время вслед за ним выехала группа велосипедистов. На рисунке изображены графики движения туристического отряда и группы велосипедистов. Определите, на сколько меньше времени затратили на путь из A в B велосипедисты, чем туристы.



1) на 15 мин 2) на 45 мин 3) на 60 мин 4) на 75 мин

б) Из пункта B в пункт A вышла группа туристов, и через некоторое время навстречу им из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Используя графики движения туристов и велосипедиста, определите, на сколько больше времени ушло на весь путь у туристов, чем у велосипедиста.



1) на 70 мин 2) на 60 мин 3) на 40 мин 4) на 20 мин

3.2. Вторая часть экзаменационной работы

В каждом блоке этого раздела выделены две группы заданий. В первой — «Повышенный уровень» — приводятся примеры заданий, имеющих в экзаменационной работе номера с 17 по 19, т.е. стоящих на первом — третьем местах второй части. Как уже говорилось выше, задание №17 — наиболее простое, задания №18 и 19 несколько более сложные, их выполнение (при хорошем результате за первую часть экзаменационной работы) уже позволяет получить «пятерку». Таким образом, в этой рубрике, по сути, представлены задания двух уровней.

Вторая рубрика — «Высокий уровень» — это наиболее трудные задания; в работе они занимают два последних места (№20 и 21). Их выполнение позволяет получить высокий общий балл за работу. Содержание этих заданий, так же как и остальных в части 2 экзаменационной работы, находится в рамках содержания образования основной школы, задаваемого стандартом.

При подготовке учащихся к выполнению заданий второй экзамена необходимо учитывать ее дифференцированный характер. Подбирая задания для тренировки, их следует соотносить с возможностями и потребностями каждого учащегося, а также с уровнем класса в целом. При этом не надо забывать, что хорошую отметку, и даже «пятерку», можно получить, если качественно решить задания 17—19, не выполняя при этом два последних задания работы.

Выражения и их преобразования

Задания этого раздела направлены на проверку умений:

— выполнять разложение многочленов на множители с использованием нескольких способов;

— выполнять многошаговые преобразования рациональных выражений, применяя широкий набор изученных алгоритмов;

— выполнять преобразования выражений, содержащих степени с целыми показателями, квадратные корни;

— применять преобразования для решения различных математических задач (например, на нахождение наибольшего и наименьшего значений).

Задания

Повышенный уровень

1. Разложите на множители:

а) $c^2a - a - c^2 + 1$; б) $x^2y + 1 - x^2 - y$.

2. Сократите дробь:

а) $\dfrac{4a^2 - 9a + 2}{1 - 4a + x - 4ax}$; б) $\dfrac{1 - 6c + y - 6cy}{6c^2 - 7c + 1}$.

3. Упростите выражение:

а) $\dfrac{3a^2}{x^2 - 9a^2} : \left(\dfrac{3a + x}{3ax - x^2} - \dfrac{3a - x}{3ax + x^2}\right)$;

б) $\left(\dfrac{x + 5y}{x^2 - 5xy} - \dfrac{x - 5y}{x^2 + 5xy}\right) \cdot \dfrac{25y^2 - x^2}{5y^2}$.

4. Разложите на множители:

а) $x^4 - 6x^2 - 27$; б) $x^4 + x^2 - 20$.

5. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{b-3}{b^2-2b-3}-\dfrac{b}{b^2+2b+1}\right):\left(\dfrac{1}{(5b+5)^2};\right)$

б) $(3a-6)^2\cdot\left(\dfrac{a}{a^2-4a+4}-\dfrac{a-1}{a^2-3a+2}\right).$

6. Покажите, что при любых значениях n выражение принимает одно и то же значение:

а) $\dfrac{5^{n+1}+5^{n-1}}{2\cdot5^n};$ б) $\dfrac{10\cdot3^n}{3^{n+1}-3^{n-1}}.$

7. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{\left(4-2\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(5-2\sqrt{5}\right)^2}$

б) $\sqrt{\left(2\sqrt{7}-5\right)^2}+\sqrt{\left(2\sqrt{7}-6\right)^2}$

8. При каких значениях переменной не имеет смысла выражение:

а) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{a}{1-\dfrac{1}{a+1}}};$ б) $1+\dfrac{x}{1-\dfrac{x}{x+\dfrac{x}{x-1}}}?$

Высокий уровень

9. Докажите тождество:

а) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1=(x^2+5x+5)^2;$

б) $(x-3)(x-1)x(x+2)+9=(x^2-x-3)^2$

10. а) Докажите, что если сумма чисел a и b равна 1, то

$$a^3+b^3=1-3ab.$$

б) Докажите, что если разность чисел a и b равна 1, то

$$a^3-b^3=1+3ab.$$

11. Найдите наименьшее значение выражения и определите, при каких значениях x и y оно достигается:

а) $x^2+y^2+4x-6y;$ б) $x^2+y^2-6x+8y.$

12. а) Докажите, что ни при каких значениях a и b значение выражения $5a^2+3b^2+20a-12b+34$ не равно нулю.

б) Докажите, что ни при каких значениях a и b значение выражения $3a^2+4b^2-18a+8b+32$ не равно нулю.

Уравнения, системы уравнений

Задания этого раздела направлены на проверку следующих умений:

— решать целые и дробные уравнения с одной переменной, применяя при этом алгебраические преобразования, а также такие приемы, как разложение на множители, замена переменной;

— решать системы линейных уравнений, и системы, содержащие нелинейные уравнения, способами подстановки и сложения, применять также некоторые специальные приемы;

— проводить исследование уравнений и систем, содержащих буквенные коэффициенты, используя, в частности, графические представления;

— решать текстовые задачи, в том числе работать с моделью, в которой число переменных больше числа уравнений.

Задания

Повышенный уровень

1. Найдите корни уравнения:

а) $2x^4 - 17x^2 - 9 = 0$; б) $3x^4 - 11x^2 - 4 = 0$.

2. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x}{3x+2} + \dfrac{5}{3x-2} = \dfrac{3x^2+6x}{4-9x^2}$; б) $\dfrac{3}{2x+3} + \dfrac{x}{2x-3} = \dfrac{2x^2-9x}{9-4x^2}$.

3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2(x-y) - 3(x+y) = 2x - 6y, \\ \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{5} = \dfrac{2x}{5} - 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4(x+y) - 5(x-y) = 13y - 2x, \\ \dfrac{y-x}{3} - \dfrac{x-2y}{2} = -2. \end{cases}$

4. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + 2xy + 2y^2 = 18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 2x^2 + xy + y^2 = 1. \end{cases}$

5. Решите уравнение:

а) $6x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 6x = 0$; б) $2x^4 - 5x^3 - 18x^2 + 45x = 0$.

6. Решите уравнение:

а) $x - 2\sqrt{x} - 15 = 0$;

б) $x - 7\sqrt{x} + 6 = 0$.

7. Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} 3(x+y) + xy = -14, \\ x + y - xy = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy + 2(x-y) = 20, \\ xy + x - y = 16. \end{cases}$

8. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x - 3y = -7, \\ 4x + 5y = 19, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x + 4y = 19, \\ x - 2y = 3, \\ x^2 - 2y^2 = 24. \end{cases}$

Решите задачу (**9—10**):

9. а) На пост капитана команды претендовало три кандидата: Николаев, Окунев, Петров. Во время выборов за Петрова было отдано в 3 раза больше голосов, чем за Николаева, а за Окунева — в 2 раза меньше, чем за Николаева и Петрова вместе. Сколько процентов голосов было отдано за победителя?

б) На звание лучшего игрока чемпионата претендовало три кандидата: Рыбкин, Соколов, Тимофеев. По результатам опроса Тимофеев получил в 9 раз меньше голосов, чем Рыбкин, а Соколов — в 2 раза меньше, чем Рыбкин и Тимофеев вместе. Сколько процентов голосов было отдано за победителя?

10. а) Лесхоз планировал заготовить за несколько дней 216 новогодних елей. Первые три дня лесхоз выполнял установленную ежедневную норму, а потом стал заготавливать на 2 ели в день больше. Поэтому уже за 1 день до срока было заготовлено 232 ели. Сколько елей ежедневно заготавливал лесхоз в первые три дня работы?

б) На 600 р. студент планировал обедать определенное число дней. В каждый из первых трех дней он тратил запланированную на день сумму, а затем увеличил ежедневные траты на 20 р. В результате за 2 дня до срока он истратил уже 580 р. Сколько денег студент планировал тратить на обед ежедневно?

Высокий уровень

11. Решите уравнение:

а) $(x^2-3x-1)^2+2x(x-3)=1$;

б) $(2x^2-x+1)^2+2x(2x-1)=1$.

12. а) Дана система уравнений $\begin{cases}\frac{x}{3}-\frac{z}{4}+\frac{y}{12}=1,\\ \frac{y}{5}+\frac{x}{10}+\frac{z}{3}=1.\end{cases}$ Найдите сумму $x+y+z$.

б) Дана система уравнений $\begin{cases}\frac{y}{4}-\frac{z}{18}+\frac{x}{9}=1,\\ \frac{x}{30}-\frac{y}{45}-\frac{z}{18}=1.\end{cases}$ Найдите сумму $x+y+z$.

13. а) Найдите все отрицательные значения m, при которых система уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=m^2,\\ x+y=1\end{cases}$ не имеет решений.

б) Найдите все положительные значения m, при которых система уравнений $\begin{cases}x-y=2,\\ x^2+y^2=m^2\end{cases}$ не имеет решений.

14. а) Докажите, что уравнение $(x^2-2x+3)(x^2-6x+10)=2$ не имеет корней.

б) Докажите, что уравнение $(x^2-6x-11)^2+(x^2+2x+2)^2=5$ не имеет корней.

Решите задачу **(15—16)**:

15. а) Из пункта A в пункт B, расположенный выше по течению реки, вышла моторная лодка, собственная скорость которой в 5 раз больше скорости течения. Одновременно навстречу ей из пункта B отправился плот. Встретив плот, лодка сразу повернула назад и пошла вниз по течению реки. Какую часть пути от B до A пройдет плот к моменту возвращения лодки в пункт A?

б) Из пункта A в пункт B, расположенный ниже по течению реки, отправился плот. Одновременно навстречу ему из пункта B вышла лодка, собственная скорость которой в 2 раза больше скорости течения. Встретив плот, лодка сразу повернула назад и пошла вниз по течению. Какую часть пути от A до B останется пройти плоту к моменту возвращения лодки в пункт B?

16. а) При смешивании первого раствора соли, концентрация которого 40%, и второго раствора этой же соли, концентрация которого 48%, получился раствор с концентрацией 42%. В каком отношении были взяты первый и второй растворы?

б) Имеется два сплава с разным содержанием золота. В первом сплаве содержится 35%, а во втором — 60% золота. В каком отношении надо взять первый и второй сплавы, чтобы получить из них новый сплав, содержащий 40% золота?

Неравенства

Задачи этого раздела направлены на проверку умений:

— решать линейные неравенства с одной переменной и их системы, требующие для приведения их к простейшему виду алгебраических преобразований; выбирать решения, удовлетворяющие дополнительным условиям;

— решать квадратные неравенства и системы, включающие квадратные неравенства;

— решать задачи, связанные с решением неравенств и систем, содержащих буквенные коэффициенты;

применять аппарат неравенств для решения математических задач.

Задания

Повышенный уровень

1. а) Найдите наименьшее целое значение a, при котором разность дробей $\frac{12-2a}{4}$ и $\frac{1-5a}{5}$ положительна.

б) Найдите наибольшее целое значение a, при котором сумма дробей $\frac{15-3a}{2}$ и $\frac{6a-8}{3}$ отрицательна.

2. Решите неравенство:

а) $\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{17}}{8}-1\right)(4x-13)<0;$

б) $\left(\frac{\sqrt{35}+\sqrt{37}}{6}-2\right)(10+3x)<0.$

3. Решите неравенство:

а) $\frac{8x-9}{5} \geqslant \frac{x^2}{3};$ б) $\frac{x^2}{3} \geqslant \frac{3x+3}{4}.$

4. Найдите область определения выражения:

а) $\frac{\sqrt{3x^2-4x-15}}{x^2-4};$ б) $\frac{\sqrt{2x^2-5x-3}}{x^2-4}.$

5. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} 4x^2+9x-9 \leqslant 0, \\ \frac{x+1}{2} < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x^2+7x-24 \leqslant 0, \\ \frac{1-x}{2} > 0. \end{cases}$

Высокий уровень

6. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} (x^2-7x+12)^2 \leqslant 0, \\ (x^2+2x-1)^2 \geqslant 400; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x^2-2x-15)^2 \leqslant 0, \\ (x^2+x+1)^2 \leqslant 900. \end{cases}$

7. а) При каких значениях p система неравенств $\begin{cases} 5x+2 \geqslant 17+2x, \\ p+2x \leqslant 3+x \end{cases}$ имеет решения?

б) При каких значениях c система неравенств $\begin{cases} 3x+7 < 2-2x, \\ 4x-3c > 3x+5 \end{cases}$ не имеет решений?

8. а) При каких значениях m неравенство $x^2-mx-m+3 \leqslant 0$ имеет хотя бы одно решение?

б) При каких значениях n решением неравенства $x^2-2nx-n+2 \geqslant 0$ является любое число?

Функции. Координаты и графики

Задания этого раздела направлены на проверку умений:

— строить графики изученных функций и отвечать на вопросы, связанные с их исследованием;

— на основе графиков изученных функций строить более сложные графики (кусочно-заданные, с «выбитыми» точками и т. п.);

— использовать функциональные представления и свойства функций для решения математических задач из различных разделов курса (например, для решения уравнений).

— решать задачи геометрического содержания на координатной плоскости с использованием алгебраического метода и с опорой на графические представления; строить графики уравнений с двумя переменными.

Задания

Повышенный уровень

1. а) Постройте график функции $y = -2x^2 + 8x - 2$. Укажите промежутки возрастания и убывания этой функции.

б) Постройте график функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5$. Укажите промежутки возрастания и убывания этой функции.

2. а) Запишите уравнение прямой, параллельной прямой $y = 6x$ и проходящей через точку $A(3; 8)$. В какой точке эта прямая пересекает ось y?

б) Запишите уравнение прямой, параллельной прямой $y = -7x$ и проходящей через точку $A(-2; -9)$. В какой точке эта прямая пересекает ось y?

3. а) Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{3 - x}$. При каких значениях аргумента функция принимает отрицательные значения?

б) Постройте график функции $y = \frac{4 - 3x - x^2}{1 - x}$. При каких значениях аргумента функция принимает положительные значения?

4. а) Постройте график функции $y = \begin{cases} 4 - x, \text{ если } x < 4, \\ \frac{1}{2}x - 3, \text{ если } x \geqslant 4. \end{cases}$ Укажите промежуток, на котором функция возрастает.

б) Постройте график функции $y = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 3, \text{ если } x < -4. \\ 1 - x, \text{ если } x \geqslant -4. \end{cases}$ Укажите промежуток, на котором функция убывает.

5. а) Парабола с вершиной в точке $A(0; -1)$ проходит через точку $B(-2; 7)$. В каких точках эта парабола пересекает ось x?

б) Парабола с вершиной в точке $C(0; 7)$ проходит через точку $(-4; -1)$. В каких точках эта парабола пересекает ось x?

6. а) Выясните, лежат ли на одной прямой точки $A(12; 3)$, $B(14; 7)$, $C(-5; -11)$.

б) Выясните, лежат ли на одной прямой точки $M(-8; 12)$, $N(-10; 18)$, $Q(10; -42)$.

Высокий уровень

7. а) При каких отрицательных значениях k прямая $y = kx - 4$ пересекает параболу $y = x^2 - 2x$ в двух точках?

б) При каких отрицательных значениях k прямая $y = kx - 4$ и парабола $y = x^2 + 3x$ не пересекаются?

8. а) Постройте график функции $y = \begin{cases} -x^2 - 4x - 3, \text{ если } x \leqslant 1, \\ x + 1, \text{ если } -1 < x \leqslant 1, \\ \frac{2}{x}, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком этой функции две общие точки?

б) Постройте график функции $y = \begin{cases} \frac{4}{x}, \text{ если } x \leqslant -2, \\ x, \text{ если } -2 < x \leqslant 1, \\ x^2 - 4x + 4, \text{ если } x > 1. \end{cases}$ При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком этой функции одну общую точку?

9. а) При каких значениях a отрезок с концами в точках $A(-5; -6)$ и $B(-5; a)$ пересекает прямую $2x - y = -3$?

б) При каких значениях a отрезок с концами в точках $A(-3; a)$ и $B(-3; -8)$ пересекает прямую $2x - y = 3$?

10. а) Постройте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{xy + 6}{x^2 - 1} = 0$.

б) Постройте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{xy - 2}{y^2 - 1} = 0$.

Арифметическая и геометрическая прогрессии

Задания этого раздела направлены на проверку умений:

— решать задачи с применением формул n-го члена и суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий;

— применять аппарат уравнений и неравенств при решении задач на прогрессии.

Задания

Повышенный уровень

1. а) Начиная с какого номера члены арифметической прогрессии 8; 11; 14; больше 150?

б) Начиная с какого номера члены арифметической прогрессии 260; 253; 246; меньше 100?

2. а) Арифметическая прогрессия задана формулой n-го члена $a_n = 5n + 1$. Найдите сумму членов арифметической прогрессии с пятнадцатого по двадцать пятый включительно.

б) Арифметическая прогрессия задана формулой n-го члена $a_n = 2n + 3$. Найдите сумму членов арифметической прогрессии с десятого по тридцатый включительно.

3. а) Какое наименьшее число последовательных четных чисел, начиная с 2, надо сложить, чтобы их сумма оказалась больше 240?

б) Какое наибольшее число последовательных нечетных чисел, начиная с 1, надо сложить, чтобы их сумма осталась меньше 200?

4. а) Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 150, которые не делятся на 3.

б) Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 100, которые не делятся на 4.

5. а) В геометрической прогрессии $b_2 = -6$, $b_5 = 48$. Является ли членом этой прогрессии число 192?

б) В геометрической прогрессии $b_3 = \frac{3}{2}$, $b_6 = 12$. Есть ли среди членов этой прогрессии число 144?

6. а) Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии , если ее четвертый член равен $\frac{1}{24}$, а знаменатель равен $\frac{1}{2}$.

б) Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, если ее пятый член равен $\frac{3}{4}$, а знаменатель равен -2.

Высокий уровень

7. а) Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии на 32 меньше суммы следующих четырех ее членов. На сколько сумма первых десяти членов этой прогрессии меньше суммы следующих десяти ее членов?

б) Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии на 200 больше суммы следующих пяти ее членов. На сколько сумма первых десяти членов этой прогрессии больше суммы следующих десяти ее членов?

8. а) Сумма первого и четвертого членов геометрической прогрессии равна 36, а сумма второго и пятого членов равна 72. Сколько членов этой прогрессии, начиная с первого, нужно сложить, чтобы их сумма была равна 124?

б) Разность пятого и первого членов геометрической прогрессии равна 80, а разность шестого и второго членов равна 240. Сколько членов этой прогрессии нужно сложить, чтобы их сумма была равна 364?

9. а) Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если среднее из них удвоить, то получится арифметическая прогрессия. Чему равен знаменатель q геометрической прогрессии, если известно, что $|q| < 1$?

б) Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если среднее из них утроить, то получится арифметическая прогрессия. Чему равен знаменатель q геометрической прогрессии, если известно, что $|q| < 1$?

3.3. Ответы и решения

Первая часть экзаменационной работы

Числа

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
а)	4	2	2	3	3	3	4	4	3	2	0,125	16	1	4
б)	3	3	1	4	4	2	2	1	2	3	0,075	32	4	2

Буквенные выражения

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
а)	$-1{,}6$ или $-1\frac{3}{5}$ или $-\frac{8}{5}$	0,9	$\frac{2}{3}$	432	3	2	4 км	1	1	1
б)	$-1{,}75$ или $-1\frac{3}{4}$ или $-\frac{7}{4}$	$-0{,}7$	$\frac{1}{3}$	341	4	4	8 км	4	3	2

Преобразование выражений

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
а)	321	2	0,000036	4	1	3	$2x-1$	2	3
б)	314	4	0,000064	2	3	1	$3x+1$	1	4

	10	11	12	13	14	15
а)	$-\frac{1}{y}$	$a-3$	$\frac{1-2m}{m}$	$\frac{a-c}{ac}$	3	260
б)	$-\frac{c}{b}$	$\frac{1}{x+y}$	$\frac{n}{1-3n}$	$\frac{a-b}{ab}$	4	90

Уравнения

	1	2	3	4	5	6	7	8
а)	4	−2,5	10	4	$0; -\frac{1}{3}$	1322	2	$3; -\frac{1}{3}$
б)	3	0,5	12	2	$0; \frac{1}{4}$	2312	3	$-1; \frac{1}{4}$

	9	10	11	12	13	14	15	16
а)	2,5; −2	−2	(4; 1)	3	1	1,4; 3,6	3	1
б)	5; −4,5	$\frac{1}{3}$	(4; 2)	2	2	−3,4; 0,4	4	2

Неравенства

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
а)	3	2	4	4	$x > 0,5$	$\varnothing$	243	[2; 1]	3	2
б)	4	3	2	1	$x < -4,5$	$x > 2,5$	231	[−5; 1]	4	1

Последовательности и прогрессии

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
а)	−5	2	3	$a_1 = 3;\ d = -1$	−1	234	4	2	$\frac{3}{4}$	3
б)	−6	3	2	$a_1 = 5,\ d = -0,5$	−2	243	1	1	4,5	1

Функции

	1	2	3	4	5	6	7
а)	−0,9	1	3	4	312	4	2
б)	1,9	3	2	3	213	2	1

	8	9	10	11	12
а)	2	4	2	В, на 150 тыс. шт.	3
б)	3	3	3	550 тыс. шт.	2

Вторая часть экзаменационной работы

Выражения и их преобразования

1. а) Ответ: $(c-1)(c+1)(a-1)$.

Решение.

$$c^2a - a - c^2 + 1 = a(c^2-1) - (c^2-1) = (c-1)(c+1)(a-1).$$

б) Ответ: $(x-1)(x+1)(y-1)$.

Решение.

$$x^2y + 1 - x^2 - y = x^2(y-1) - (y-1) = (x^2-1)(y-1) =$$
$$= (x-1)(x+1)(y-1).$$

2. а) Ответ: $\frac{2-a}{1+x}$.

Решение. Корни квадратного трехчлена $4a^2-9a+2$: $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{1}{4}$. Имеем:

$$\frac{4a^2-9a+2}{1-4a+x-4ax} = \frac{4(a-2)\left(a-\frac{1}{4}\right)}{(1-4a)+x(1-4a)} = \frac{(a-2)(4a-1)}{(1-4a)(1+x)} = \frac{2-a}{1+x}.$$

б) Ответ: $\frac{1+y}{1-c}$.

Решение. Корни квадратного трехчлена $6c^2-7c+1$: $c_1 = 1$, $c_2 = \frac{1}{6}$. Имеем:

$$\frac{1-6c+y-6cy}{6c^2-7c+1} = \frac{(1-6c)+y(1-6c)}{6(c-1)\left(c-\frac{1}{6}\right)} = \frac{(1-6c)(1+y)}{(c-1)(6c-1)} = \frac{1+y}{1-c}.$$

3. а) Ответ: $-\frac{a}{4}$.

Решение.

1) $$\frac{3a+x}{3ax-x^2} - \frac{3a-x}{3ax+x^2} = \frac{3a+x}{x(3a-x)} - \frac{3a-x}{x(3a+x)} =$$
$$= \frac{(3a+x)^2-(3a-x)^2}{x(9a^2-x^2)} = \frac{12ax}{x(9a^2-x^2)} = \frac{12a}{9a^2-x^2}.$$

2) $$\frac{3a^2}{x^2-9a^2} : \frac{12a}{9a^2-x^2} = \frac{3a^2(9a^2-x^2)}{(x^2-9a^2)\,12a} = -\frac{a}{4}.$$

б) Ответ: $-\frac{4}{y}$.

Решение. 1) $\frac{x+5y}{x^2-5xy}-\frac{x-5y}{x^2+5xy}=\frac{x+5y}{x(x-5y)}-\frac{x-5y}{x(x+5y)}=$

$$=\frac{(x+5y)^2-(x-5y)^2}{x(x^2+25y^2)}=\frac{20xy}{x(x^2+25y^2)}=\frac{20y}{x^2+25y^2}.$$

2) $\frac{20y}{x^2+25y^2}\cdot\frac{25y^2-x^2}{5y^2}=-\frac{4}{y}$.

4. а) Ответ: $(x-3)(x+3)(x^2+3)$.

Решение. Введем замену $t=x^2$, получим квадратный трехчлен: $t^2-6t-27$; его корни $t_1=-3$, $t_2=9$. Отсюда:

$$x^4-6x^2-27=(x^2-9)(x^2+3)=(x-3)(x+3)(x^2+3).$$

б) Ответ: $(x-2)(x+2)(x^2+5)$.

Решение. Введем замену $t=x^2$, получим квадратный трехчлен: t^2+t-20; его корни $t_1=-5$, $t_2=4$. Отсюда:

$$x^4+x^2-20=(x^2-4)(x^2+5)=(x-2)(x+2)(x^2+5).$$

5. а) Ответ: 25.

Решение.

1) $\frac{b-3}{b^2-2b-3}-\frac{b}{b^2+2b+1}=\frac{b-3}{(b-3)(b+1)}-\frac{b}{(b+1)^2}=$

$$=\frac{1}{b+1}-\frac{b}{b+1^2}=\frac{b+1-b}{(b+1)^2}=\frac{1}{(b+1)^2}.$$

2) $\frac{1}{(b+1)^2}:\frac{1}{(5b+5)^2}=\frac{25(b+1)^2}{(b+1)^2}=25$.

б) Ответ: 18.

Решение.

1) $\frac{a}{a^2-4a+4}-\frac{a-1}{a^2-3a+2}=\frac{a}{(a-2)^2}-\frac{a-1}{(a-1)(a-2)}=$

$$=\frac{a}{a-2^2}-\frac{1}{a-2}=\frac{a-a+2}{(a-2)^2}=\frac{2}{(a-2)^2}.$$

2) $(3a-6)^2\cdot\frac{2}{(a-2)^2}=\frac{9(a-2)^2\cdot 2}{(a-2)^2}=18$.

6. а) Ответ: при всех значениях n значение выражения равно 2,6.

Решение. Упростим выражение $\frac{5^{n+1}+5^{n-1}}{2\cdot 5^n}$, получим:

$$\frac{5^{n+1}+5^{n-1}}{2\cdot 5^n} = \frac{5^{n-1}(25+1)}{5^{n-1}\cdot 2\cdot 5} = \frac{26}{10} = 2{,}6.$$

б) Ответ: при всех значениях n значение выражения равно 3,75.

Решение. Упростим выражение $\frac{10\cdot 3^n}{3^{n+1}-3^{n-1}}$, получим:

$$\frac{10\cdot 3^n}{3^{n+1}-3^{n-1}} = \frac{10\cdot 3\cdot 3^{n-}}{3^{n-1}(9-1)} = \frac{30}{8} = 3{,}75.$$

7. а) Ответ: 1.

Решение. $\sqrt{\left(4-2\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(5-2\sqrt{5}\right)^2} = |4-2\sqrt{5}|+|5-2\sqrt{5}|$.
Так как 4 $4 < 2\sqrt{5}$, то $4-2\sqrt{5} < 0$ и $|4-2\sqrt{5}| = 2\sqrt{5}-4$; так как $5 > 2\sqrt{5}$, то $5-2\sqrt{5} > 0$ и $|5-2\sqrt{5}| = 5-2\sqrt{5}$. Имеем:

$$\sqrt{\left(4-2\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(5-2\sqrt{5}\right)^2} = |4-2\sqrt{5}|+|5-2\sqrt{5}| =$$
$$= 2\sqrt{5}-4+5-2\sqrt{5} = 1.$$

б) Ответ: 1.

8. а) Ответ: При $a=-1$ и $a=0$.
Решение. Выражение не имеет смысла при следующих условиях:
1) $a+1=0$; $a=-1$;
2) $1-\frac{1}{a+1}=0$; $\frac{a}{a+1}=0$; $a=0$;
3) $1-\frac{a}{1-\frac{1}{a+1}}=0$; $1-\frac{a}{\frac{a}{a+1}}=0$; $1-a-1=0$; $a=0$.

б) Ответ: При $x=1$ и $x=0$.
Решение. Выражение не имеет смысла при следующих условиях:
1) $x-1=0$; $x=1$;
2) $x+\frac{x}{x-1}=0$; $\frac{x^2}{x-1}=0$; $x=0$;
3) $1-\frac{x}{x+\frac{x}{x-1}}=0$; $1-\frac{x}{\frac{x^2}{x-1}}=0$; $1-\frac{x-1}{x}=0$; $\frac{1}{x}=0$ — нет решения.

9. а) *Решение.* Тождество может быть доказано разными способами. Вот один из возможных.

Запишем равенство в виде

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = (x^2+5x+5)^2 - 1.$

Чтобы доказать его, разложим правую часть на множители. Имеем:

$$(x^2+5x+5)^2 - 1 = (x^2+5x+5-1)(x^2+5x+5+1) =$$
$$= (x^2+4x+4)(x^2+5x+6) = (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) =$$
$$= (x+1)(x+2)(x+3)(x+4).$$

б) *Решение.* Докажем тождество другим способом, выполнив преобразование левой части. Перемножим попарно крайние и средние множители в произведении $(x-3)(x-1)x(x+2)$, получим:

$(x-3)(x-1)x(x+2)+9 = (x^2-x-6)(x^2-x)+9.$

Введем замену $x^2-x=t$, получим

$$(t-6)t+9 = t^2-6t+9 = (t-3)^2$$

Вернемся к переменной x: $(t-3)^2 = (x^2-x-3)^2$

10. а) *Решение.* Составим разность правой и левой частей равенства и покажем, что при заданном условии эта разность равна нулю.

$a^3+b^3-1+3ab = (a+b)(a^2-ab+b^2)-1+3ab.$

Так как $a+b=1$, то

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)-1+3ab = a^2-ab+b^2-1+3ab =$$
$$= a^2+2ab+b^2-1 = (a+b)^2-1 = 1-1 = 0.$$

б) *Решение.* Равенство может быть доказано аналогичным способом, но покажем здесь еще одно возможное решение. Будем преобразовывать левую часть: $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Так как $a-b=1$, то $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^2+ab+b^2$.

Учитывая, что $a^2+b^2 = (a-b)^2+2ab$, получим:

$$a^2+ab+b^2 = (a-b)^2+2ab+ab = 1+3ab.$$

11. а) Ответ: наименьшее значение выражения равно -13, оно достигается при $x=-2$ и $y=3$.

Решение. Выделим в данном выражении квадраты двучленов:

$$x^2+y^2+4x-6y = (x+2)^2+(y-3)^2-13.$$

Выражение принимает наименьшее значение, если $(x+2)^2=0$ и $(y-3)^2=0$. Эти равенства выполняются при $c=-2$ и $y=3$. Значение выражения при этих значениях переменных равно -13.

б) Ответ: наименьшее значение выражения равно –25, оно достигается при $x = -2$ и $y = 3$.

Решение. Выделим в данном выражении квадраты двучленов:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = (x-3)^2 + (y+4)^2 - 25.$$

Выражение принимает наименьшее значение, если $(x-3)^2 = 0$ и $(y+4)^2 = 0$. Эти равенства выполняются при $x = 3$ и $y = -4$. Значение выражения при этих значениях переменных равно –25.

12. а) *Решение.*

$$5a^2 + 3b^2 + 20a - 12b + 34 = (5a^2 + 20a + 20) + (3b^2 - 12b + 12) + 2 =$$
$$= 5(a^2 + 4a + 4) + 3(b^2 - 4b + 4) + 2 = 5(a+2)^2 + 3(b-2)^2 + 2 > 0.$$

Значения выражений $5(a+2)^2$ и $3(b-2)^2$ неотрицательны при любых значениях входящих в них переменных, следовательно, при любых a и b Тем самым доказано, что ни при каких значениях a и b значение данного выражения не равно нулю.

б) *Решение.* Представим данное выражение в виде

$$3(a-3)^2 + 4(b+1)^2 + 1.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным в пункте а).

Уравнения, системы уравнений

1. а) Ответ: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Решение. Введем замену $x^2 = y$, получим уравнение

$$2y^2 - 17y - 9 = 0;$$

его корни: $y_1 = 9$, $y_2 = -0{,}5$.

Решим уравнения $x^2 = 9$ и $x^2 = -0{,}5$. Корни уравнения $x_2 = 9$: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$; уравнение $x_2 = -0{,}5$ корней не имеет.

б) Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Решение. Введем замену $x^2 = y$, получим уравнение

$$3y^2 - 11y - 4 = 0;$$

его корни: $y_1 = 4$, $y_2 = -\frac{1}{3}$.

Решим уравнения $x^2 = 4$ и $x^2 = -\frac{1}{3}$. Корни уравнения $x^2 = 4$: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$; уравнение $x^2 = -\frac{1}{3}$ — корней не имеет.

2. а) Ответ: 2,5.

Решение. ОДЗ: $x \neq \pm\frac{2}{3}$. Умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей $(3x+2)(3x-2)$. Получим квадратное уравнение $6x^2+19x+10=0$. Его корни: $x_1=-2{,}5$, $x_2=-\frac{2}{3}$. Корень, равный $-\frac{2}{3}$, не удовлетворяет ОДЗ.

б) Ответ: нет решений.

Решение. ОДЗ: $x \neq \pm\frac{3}{2}$. Умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей $(2x+3)(2x-3)$. Получим квадратное уравнение $4x^2-9=0$. Его корни $x=\pm\frac{3}{2}$ не удовлетворяют ОДЗ.

3. а) Ответ: $(-1; -3)$.

Решение. После раскрытия скобок в первом уравнении и умножения обеих частей второго уравнения на общий знаменатель входящих в него дробей, получим:

$$\begin{cases} 2x-2y-3x-3y=2x-6y, \\ 5x+5y-2x+2y=4x-20; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x=y, \\ x-7y=20; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x=y, \\ -20x=20; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-3, \\ x=-1. \end{cases}$$

б) Ответ: $(4; 1)$.

Решение. Выполнив преобразования, получим:

$$\begin{cases} 4x+4y-5x+5y=13y-2x, \\ 2y-2x-3x+6y=-12; \end{cases} \quad \begin{cases} x=4y, \\ 5x-8y=12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4y, \\ 12y=12; \end{cases} \quad \begin{cases} x=4, \\ y=1. \end{cases}$$

4. а) Ответ: $(0; 3)$, $(6; 3)$.

Решение. Систему уравнений можно решить простой подстановкой, выразив из первого уравнения x или y. Но возможно и другое, более экономное решение, которое приведено ниже.

Преобразуем второе уравнение системы, получим:

$$\begin{cases} x+y=3, \\ (x+y)^2+y^2=18. \end{cases}$$

Подставим во второе уравнение значение $x+y$, равное 3, получим систему $\begin{cases} x+y=3, \\ 9+y^2=18. \end{cases}$ Из второго уравнения найдем, что $y=\pm 3$. Подставив каждое из этих значений y в первое уравнение, получим два решения системы: $\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=3 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2=6, \\ y_2=-3. \end{cases}$

б) Ответ: (0; 1), $\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right)$.

Решение. Преобразуем второе уравнение системы, выразим из него x и подставим в первое уравнение системы:

$$\begin{cases} 2x+y=1, \\ x(2x+y)+y^2=1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+y=1, \\ x+y^2=1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2y^2-y-1=0, \\ x=1-y^2. \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем, что $y=1$ или $y=-\frac{1}{2}$.

Подставив каждое из этих значений y во второе уравнение, получим два решения системы: $\begin{cases} x=0, \\ y=1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=\frac{3}{4}, \\ y=-\frac{1}{2}. \end{cases}$

5. а) Ответ: 0; 0,5.

Решение.

$$6x^4-3x^3+12x^2-6x=0;$$
$$3x^3(2x-1)+6x(2x-1)=0;$$
$$3x(2x-1)(x^2+2)=0;$$
$$x_1=0,\ x_2=0{,}5.$$

б) Ответ: 0; 2,5; –3; 3.

Решение.

$$2x^4-5x^3-18x^2+45x=0;$$
$$x^3(2x-5)-9x(2x-5)=0;$$
$$x(2x-5)(x^2-9)=0;$$
$$x_1=0,\ x_2=2{,}5,\ x_{3,4}=\pm 3.$$

6. а) Ответ: 25.

Введем замену $\sqrt{x} = y$, получим уравнение $y^2 - 2y - 15$, корни которого $y_1 = -3$, $y_2 = 5$. Вернемся к переменной x, получим два уравнения: $\sqrt{x} = -3$ и $\sqrt{x} = 5$. Первое уравнение корней не имеет; корнем второго уравнения является число 25.

б) Ответ: 36; 1.

7. а) Ответ: (–4; 2) и (2; –4).

Решение. Сложим уравнения системы, получим уравнение $4x + 4y = -8$, или $x + y = -2$. Умножив второе уравнение на -3 и сложив его с первым, получим уравнение $4xy = -32$, или $xy = -8$.

Далее решим систему уравнений $\begin{cases} x + y = -2, \\ xy = -8. \end{cases}$ Ее решения: (–4; 2) и (2; –4).

Другой способ. Введем замену $x + y = a$, получим систему линейных уравнений $\begin{cases} 3a + b = 14, \\ a - b = -6. \end{cases}$ Решив ее, найдем, что $a = -2$, $b = -8$.

Далее вернемся к переменным x и y, получим систему $\begin{cases} x + y = -2, \\ xy = -8. \end{cases}$

б) Ответ: (6; 2) и (–2; –6).

8. а) Ответ: (1; 3).

Решение. Решить данную систему — это значит найти такие пары значений x и y, при которых все три уравнения обращаются в верные равенства. Способ решения следующий: решаем систему уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = -7, \\ 4x + 5y = 19 \end{cases}$ и, если она имеет решение, то подстановкой проверяем, удовлетворяет ли найденная пара чисел третьему уравнению системы.

б) Ответ: система решений не имеет.

9. а) Ответ: 50 %.

Решение. Пусть за Николаева проголосовало x человек, тогда за Петрова проголосовало $3x$ человек, а за Окунева — $2x$ человек; всего приняло участие в голосовании $6x$ человек. Найдем отношение числа избирателей, проголосовавших за Петрова, к общему числу избирателей и выразим его в процентах: $\frac{3x}{6x} = 0{,}5$ — это 50%.

б) Ответ: 60 %.

Решение. Пусть x человек проголосовало за Тимофеева, тогда за Рыбкина проголосовало $9x$ человек, а за Соколова $\frac{1}{2}(x + 9x) = 5x$ человек. Отсюда за Рыбкина проголосовало $\frac{9x}{9x + 5x + x} \cdot 100\% = 60\%$ избирателей.

10. а) Ответ: 12 елей.

Решение. Пусть в первые три дня работы лесхоз заготавливал ежедневно по x елей, тогда в остальные дни он заготавливал по $x + 2$ ели.

После трех дней работы ему осталось заготовить $232 - 3x$ ели, и на это потребовалось $\frac{232 - 3x}{x + 2}$ дня.

По плану он должен был работать $\frac{216}{x}$ дней.

Получаем уравнение: $\frac{216}{x} = 3 + \frac{232 - 3x}{x + 2} + 1$. Решив его, найдем, что $x = 12$.

б) Ответ: 60 рублей.

Решение. Пусть x р. студент планировал тратить на обед ежедневно. Уравнение: $\frac{600}{x} = 3 + \frac{580 - 3x}{x + 20} + 2$.

11. а) Ответ: 0; 3.

Решение. Представим уравнение в виде

$$(x^2 - 3x - 1)^2 + 2(x^2 - 3x) = 1.$$

Введем замену $x^2 - 3x - 1 = y$, получим уравнение $y^2 + 2(y + 1) - 1 = 0$, т.е. $y^2 + 2y + 1 = 0$. Его корень $y = -1$.

Уравнение $x^2 - 3x - 1 = -1$ имеет корни 0 и 3.

Возможны и другие замены, например, $x^2 - 3x = y$. Тогда получается уравнение $(y - 1)^2 + 2y - 1 = 0$.

б) Ответ: 0; 0,5.

Решение. Представим уравнение в виде

$$(2x^2 - x + 1)^2 + 2(2x^2 - x) = 1.$$

Введем замену $2x^2 - x + 1 = y$, получим уравнение $y^2 + 2(y - 1) - 1 = 0$, т.е. $y^2 + 2y - 3 = 0$. Его корни $y_1 = -3$, $y_2 = 1$.

Уравнение $2x^2 - x + 1 = -3$ корней не имеет, уравнение $2x^2 - x + 1 = 1$ имеет корни 0 и $\frac{1}{2}$.

Возможны и другие замены, например, $2x^2 - x = y$. Тогда получается уравнение $(y + 1)^2 + 2y - 1 = 0$.

12. а) Ответ: 6.

Решение. Умножим каждое уравнение системы на общий знаменатель содержащихся в нем дробей, получим: $\begin{cases} 4x + y - 3z = 12, \\ 3x + 6y + 10z = 30. \end{cases}$

Сложив уравнения этой системы, получим $7x + 7y + 7z = 42$. Отсюда $x + y + z = 6$.

б) Ответ: 18.

Решение. Умножим каждое уравнение системы на общий знаменатель содержащихся в нем дробей, получим: $\begin{cases} 4x + 9y - 2z = 36, \\ 3x - 2y - 5z = 90. \end{cases}$

Сложив уравнения системы, получим $7x + 7y - 7z = 126$. Отсюда $x + y - z = 18$.

13. а) Ответ: $m \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$.

Решение. Подставим $y = 1 - x$ в уравнение $x^2 + y^2 = m^2$, получим квадратное уравнение относительно x: $2x^2 - 2x + (1 - m^2) = 0$. Найдем значения m, при которых это уравнение не имеет решений:

$$D_1 = 1 - 2(1 - m^2) = 2m^2 - 1; \quad 2m^2 - 1 < 0; \quad |m| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, система не имеет решений при $-\frac{1}{\sqrt{2}} < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Учитывая условие $m < 0$, получим: $m \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$.

б) Ответ: $m \in \left(0; \sqrt{2}\right)$.

Решение. Подставим $y = x - 2$ в уравнение $x^2 + y^2 = m^2$, получим квадратное уравнение относительно x: $2x^2 - 4x + (4 - m^2) = 0$. Найдем значения m, при которых это уравнение не имеет решений:

$$D_1 = 4 - 2(4 - m^2) = 2m^2 - 4; \quad 2m^2 - 4 < 0; \quad |m| < \sqrt{2}.$$

Таким образом, система не имеет решений при $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$. Учитывая условие $m > 0$, получим: $m \in \left(0; \sqrt{2}\right)$.

14. а) *Решение.* В каждой скобке выделим квадрат двучлена, получим $\left((x-1)^2 + 2\right) \cdot \left((x-3)^2 + 1\right) = 2$. Далее возможны разные способы рассуждения.

Способ 1. Представим уравнение в виде

$$(x-1)^2 \cdot (x-3)^2 + (x-1)^2 + 2(x-3)^2 = 0.$$

Все слагаемые неотрицательны и не равны нулю одновременно, следовательно, уравнение не имеет корней.

Способ 2. Этот способ основан на функциональных свойствах квадратного трехчлена: при любых значениях x выполняются неравенства $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \geqslant 2$ и $x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1 \geqslant 1$. Свои наименьшие значения (соответственно 2 и 1) эти трехчлены принимают не одновременно, следовательно, при любом x их произведение больше 2, и уравнение корней не имеет.

б) *Решение.* Рассуждение проводится аналогично.

15. а) Ответ: плот пройдет $\frac{1}{3}$ всего пути.

Решение. Возможны различные способы решения. Ниже приведен один из них.

Пусть скорость течения реки (и плота) x км/ч. Тогда скорость лодки против течения равна $5x - x = 4x$ км/ч, а по течению $5x + x = 6x$ км/ч. Следовательно, скорость лодки против течения в 4 раза больше скорости плота, а по течению — в 6 раз больше скорости плота.

Если плот до встречи проплыл S км, то лодка в 4 раза больше, т.е. $4S$ км. После встречи лодка пройдет $4S$ км, а плот — в 6 раз меньше, т.е. $\frac{4S}{6} = \frac{2S}{3}$ км. Всего плот проплывет $S + \frac{2S}{3} = \frac{5S}{3}$. Отношение пройденного плотом пути ко всему пути равно $\frac{\frac{5S}{3}}{5S} = \frac{1}{3}$.

б) Ответ: плоту останется пройти $\frac{1}{3}$ всего расстояния.

Решение. Пусть скорость течения реки (и плота) x км/ч. Тогда скорость лодки против течения равна $2x - x = x$ км/ч, а по течению $2x + x = 3x$ км/ч. Следовательно, скорость лодки против течения равна скорости плота, а по течению — в 3 раза больше скорости плота.

Если плот до встречи проплыл S км, то лодка проплыла столько же, т.е. S км. После встречи лодка пройдет S км, а плот — в 3 раза меньше, т.е. $\frac{S}{3}$ км. Всего плот проплывет $S + \frac{S}{3} = \frac{4S}{3}$ км, значит, ему останется проплыть $2S - \frac{4S}{3} = \frac{2S}{3}$ км. Отношение оставшегося пути ко всему пути равно $\frac{2S}{3} : 2S = \frac{1}{3}$.

16. а) Ответ: в отношении $3:1$.

Решение. Пусть x — масса первого раствора, y — масса второго раствора. Тогда количество соли в первом растворе составляет $0{,}4x$, а во втором — $0{,}48y$. Масса раствора, получившегося после смешивания, равна $x + y$, а количество соли в нем составляет $0{,}42(x + y)$. Имеем уравнение $0{,}4x + 0{,}48y = 0{,}42(x + y)$. После преобразований получим $40x + 48y = 42x + 42y$; $x = 3y$. Отсюда: $\frac{x}{y} = \frac{3}{1}$.

б) Ответ: в отношении $4:1$.

Решение. Пусть x — масса первого сплава, y — масса второго сплава. Тогда количество золота в первом сплаве составляет $0{,}35x$, а во втором — $0{,}6y$. Масса нового сплава равна $x + y$, а количество золота в нем составляет $0{,}4(x + y)$. Имеем уравнение

$$0{,}35x + 0{,}6y = 0{,}4(x + y).$$

После преобразований получим $35x + 60y = 40x + 40y$, $x = 4y$. Отсюда: $\frac{x}{y} = \frac{4}{1}$.

1. а) Ответ: -5.

Решение. Умножим обе части неравенства $\frac{12-2a}{4} - \frac{1-5a}{5} > 0$ на 20, получим неравенство $5(12-2a) - 4(1-5a) > 0$. Решив его, получим $a > -5{,}6$. Наименьшее целое значение a, удовлетворяющее этому неравенству, равно -5.

б) Ответ: 9.

2. а) Ответ: $x > 3\frac{1}{4}$.

Решение. Определим знак выражения $\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{17}}{8} - 1\right)$.

Предположим, что верно неравенство $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{17}}{8} < 1$. Тогда $\sqrt{15}+\sqrt{17} < 8$.

Возведем обе части последнего неравенства в квадрат, получим $32 + 2\sqrt{255} < 64$, т.е. $\sqrt{255} < 16$. Получили верное числовое неравенство, следовательно, наше предположение было верным и разность $\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{17}}{8} - 1\right)$ отрицательна. Разделив обе части данного неравенства на $\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{17}}{8} - 1\right)$, получим неравенство $4x - 13 > 0$, отсюда $x > 3\frac{1}{4}$.

б) Ответ: $x > -3\frac{1}{3}$.

3. а) Ответ: $[1{,}8;\ 3]$.

Решение. Умножив обе части неравенства на 15, получим

$$5x^2 - 24x + 27 \leqslant 0.$$

Множество его решений — промежуток $[1{,}8;\ 3]$.

б) Ответ: $\left(-\infty;\ -\frac{3}{4}\right] \cup [3;\ +\infty)$.

4. а) Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{5}{3}\right] \cup [3; +\infty)$.

Решение. Область определения выражения задается системой

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x - 15 \geqslant 0, \\ x^2 - 4 \neq 0. \end{cases}$$

Решив каждое из неравенств, получим:

1) $3x^2 - 4x - 15 \geqslant 0$, $x_1 = -\frac{5}{3}$, $x_2 = 3$; $x \leqslant -\frac{5}{3}$ или $x \geqslant 3$.

2) $x \neq \pm 2$.

С помощью координатной прямой найдем, что пересечением этих множеств является множество $(-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{5}{3}\right] \cup [3; +\infty)$.

б) Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{1}{2}\right] \cup [3; +\infty)$.

5. а) Ответ: -3; -2.

Решение. Решив каждое неравенство, получим систему

$$\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}, \\ x < -1. \end{cases}$$

Множество решений этой системы достаточно показать на рисунке. Из рисунка легко найти целые числа, принадлежащие полученному множеству: -3 и -2.

б) Ответ: -2; -1; 0.

Решение. Решив каждое неравенство, получим систему

$$\begin{cases} -2\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1{,}5, \\ x < 1. \end{cases}$$

Целые решения этой системы — числа : -2; -1; 0.

6. а) Ответ: $x = 4$.

Решение. Первое неравенство системы верно, только если $x^2 - 7x + 12 = 0$, т.е. при $x = 3$ и $x = 4$. Подстановкой убеждаемся, что при $x = 3$ второе неравенство системы неверно, а при $x = 4$ верно. Следовательно, подходит только $x = 4$.

б) Ответ: -3.

Решение. Первое неравенство системы верно, только если $x^2 - 2x - 15 = 0$, т.е. при $x = -3$ и $x = 5$. Подстановкой убеждаемся, что при $x = -3$ второе неравенство системы верно, а при $x = 5$ — неверно. Следовательно, подходит только $x = -3$.

7. а) Ответ: при $p \leqslant -2$.

Решение. Преобразовав каждое неравенство, получим систему:

$$\begin{cases} x > 5, \\ x \leqslant 3 - p. \end{cases}$$

Система имеет решения, если $5 < 3 - p$. (К этому выводу легко придти с помощью координатной прямой). Отсюда $p \leqslant -2$.

б) Ответ: при $c \geqslant -2$.

Решение. Преобразовав каждое неравенство, получим систему:

$$\begin{cases} x < -1, \\ x > 3c + 5. \end{cases}$$

Система не имеет решений, если $-1 \leqslant 3c + 5$. (К этому выводу легко придти с помощью координатной прямой). Отсюда $c \geqslant -2$.

8. а) Ответ: при $m \in (-\infty; -6] \cup [2; +\infty)$.

Решение. Так как ветви параболы $y = x^2 - mx - m + 3$ направлены вверх, то она не должна быть расположена выше оси Ox целиком, т.е. она должна пересекать ось Ox или касаться ее. Поэтому

$$D = m^2 + 4m - 12 \geqslant 0.$$

Получаем $m \leqslant -6$ или $m \geqslant 2$.

б) Ответ: при $[-2; 1]$.

Решение. Так как ветви параболы $y = x^2 - 2nx - n + 2$ направлены вверх, то она должна быть расположена выше оси Ox или касаться ее. Поэтому $D_1 = n^2 + n - 2 \leqslant 0$. Получаем $-2 \leqslant n < 1$.

1. а) Ответ: возрастает на промежутке $(-\infty; 2]$, убывает на промежутке $[2; +\infty)$.

Решение. $x_0 = \frac{-8}{-4} = 2$. Так как ветви параболы направлены вниз, то функция возрастает на промежутке $(-\infty; 2]$ и убывает на промежутке $[2; +\infty)$.

Ответ может быть считан непосредственно с построенного графика и не содержать никаких пояснений.

б) Ответ: убывает на промежутке $(-\infty; -4]$, возрастает на промежутке $[-4; +\infty)$.

2. а) Ответ: $(0; -10)$.

Решение. Прямая, параллельная прямой $y = 6x$, имеет уравнение $y = 6x + b$. Так как прямая проходит через точку $A(3; 8)$, то $8 = 6 \cdot 3 + b$. Отсюда $b = -10$. Прямая пересекает ось y в точке $(0; -10)$.

б) Ответ: $(0; -23)$.

Решение. Прямая, параллельная прямой $y = -7x$, имеет уравнение $y = -7x + b$. Так как прямая проходит через точку $A(-2; -9)$, то $-9 = -7 \cdot (-2) + b$. Отсюда $b = -10$. Прямая пересекает ось y в точке $(0; -23)$.

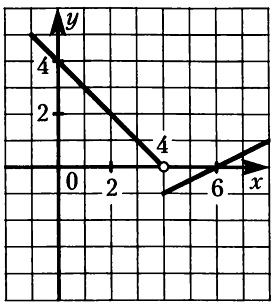
3. а) Ответ: $y < 0$ при $x > 3$ и $1 < x < 3$.

Решение. Функцию можно задать формулой $y = 1 - x$, где $x \neq 3$.

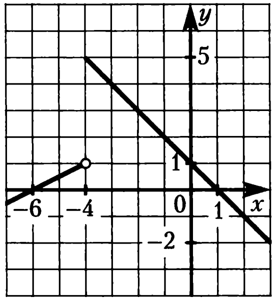
б) Ответ: $y > 0$ при $x > 1$ и $-4 < x < 1$.

Решение. Функцию можно задать формулой $y = x + 4$, где $x \neq 1$.

4. а) Ответ: график изображен на рисунке; функция возрастает на промежутке $[4; +\infty)$.



б) Ответ: график изображен на рисунке; функция убывает на промежутке $[-4; +\infty)$.



5. а) Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$.

Решение. Парабола с вершиной в точке $A(0; -1)$ имеет уравнение $y = ax^2 - 1$. Так как она проходит через точку $B(-2; 7)$, то верно равенство $7 = a(-2)^2 - 1$. Отсюда $a = 2$. Координаты x точек пересечения с осью x являются решением уравнения $2x^2 - 1 = 0$. Отсюда $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

б) Ответ: $(\sqrt{14}; 0)$, $(-\sqrt{14}; 0)$.

Решение. Парабола с вершиной в точке $C(0; 7)$ имеет уравнение $y = ax^2 + 7$. Так как она проходит через точку $D(-4; -1)$, то верно равенство $-1 = a(-4)^2 + 7$. Отсюда $a = -\frac{1}{2}$. Координаты x точек пересечения с осью x являются решением уравнения $-\frac{1}{2}x^2 + 7 = 0$. Отсюда $x = \pm\sqrt{14}$.

6. а) Ответ: точки A, B и C не лежат на одной прямой.

Решение. Идея решения: составим уравнение прямой, проходящей через какие-нибудь две из данных точек, и проверим, принадлежит ли этой прямой третья точка.

Уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$. Найдем коэффициенты k и b для прямой, проходящей через точки A и B. Подставив координаты этих точек в уравнение $y = kx + b$, получим систему уравнений с переменными k и b $\begin{cases} 3 = 12k + b, \\ 7 = 14k + b, \end{cases}$ откуда $k = 2$, $b = -21$. Таким образом, прямая AB задается уравнением $y = 2x - 21$.

Подставив координаты точки C в полученное уравнение, убеждаемся в том, что точка C не лежит на этой прямой.

б) Ответ: точки M, N и Q лежат на одной прямой.

Решение. Уравнение прямой MN имеет вид $y = -3x - 12$. Координаты точки Q удовлетворяют этому уравнению.

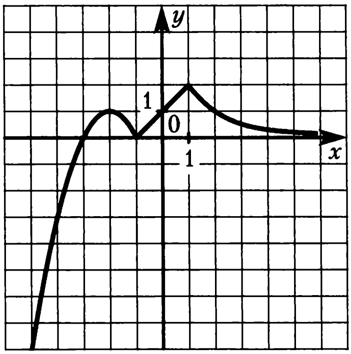
7. а) Ответ: $k < -6$.

Решение. Прямая $y = kx - 4$ пересекает параболу $y = x^2 - 2x$ в двух точках, если уравнение $kx - 4 = x^2 - 2x$ имеет два решения, т.е. дискриминант уравнения $x^2 - (2 + k)x + 4 = 0$ больше нуля. Имеем: $(2 + k)^2 - 16 > 0$. Отсюда $k > 2$ или $k < -6$. Так как k отрицательно, то $k < -6$.

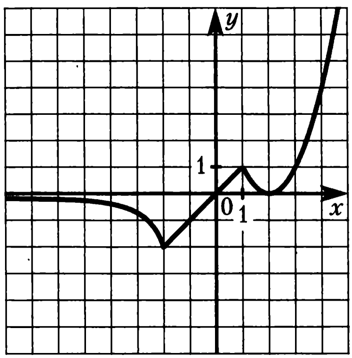
б) Ответ: $-1 < k < 0$.

Решение. Прямая $y = kx - 4$ и парабола $y = x^2 + 3x$ не пересекаются, если уравнение $kx - 4 = x^2 + 3x$ не имеет решений, т.е. дискриминант уравнения $x^2 - (k - 3)x + 4 = 0$ меньше нуля. Имеем: $(k - 3)^2 - 16 < 0$. Отсюда $-1 < k < 7$. Так как k отрицательно, то $-1 < k < 0$.

8. а) Ответ: График изображен на рисунке; прямая $y = m$ имеет с графиком этой функции две общие точки при $m = 0$ и $1 < m < 2$.



б) Ответ: График изображен на рисунке; прямая $y = m$ имеет с графиком этой функции одну общую точку при $m = -2$ и $m > 1$.



9. а) Ответ: $a \leqslant -7$

Решение. Задача решается на основе графических соображений. Точки A и B лежат на вертикальной прямой $x = -5$. Найдем ординату точки пересечения прямых $2x - y = -3$ и $x = -5$. Получим: $y = -7$. Очевидно, что точка $A(-5; -6)$ расположена выше прямой $2x - y = -3$. Следовательно, отрезок AB пересекает эту прямую в том случае, когда точка $B(-5; a)$ лежит ниже этой прямой, т.е. когда выполняется неравенство $a \leqslant -7$.

б) Ответ: $a \leqslant -9$.

Решение. Точки A и B лежат на вертикальной прямой $x = -3$. Найдем ординату точки пересечения прямых $2x - y = 3$ и $x = -3$. Получим: $y = -9$. Очевидно, что точка $B(-3; -8)$ расположена выше прямой $2x - y = 3$. Следовательно, отрезок AB пересекает эту прямую в том случае, когда точка $A(-3; a)$ лежит выше этой прямой, т.е. когда выполняется неравенство $a \leqslant -9$.

10. а) Ответ: гипербола $y = -\dfrac{6}{x}$ без точек $(1; -6)$ и $(-1; 6)$.

Решение. Дробь $\dfrac{xy + 6}{x^2 - 1}$ равна нулю в том и только том случае, если $xy + 6 = 0$ и $x^2 - 1 \neq 0$. Системой задается гипербола без точек с абсциссами 1 и -1, т.е без точек $(1; -6)$ и $(-1; 6)$.

б) Ответ: гипербола $y = \dfrac{2}{x}$ без точек $(2; 1)$ и $(-2; -1)$.

Арифметическая и геометрическая прогрессии

1. а) Ответ: начиная с номера 49.

Решение. В данной арифметической прогрессии

$$a_1 = 8, \quad d = 11 - 8 = 3.$$

Запишем формулу n-го члена этой прогрессии: $a_n = 8 + 3(n - 1)$ и решим неравенство $8 + 3(n - 1) > 150$. Получим $n > 48\frac{1}{3}$. Значит, члены данной прогрессии становятся больше 150, начиная с номера 49.

б) Ответ: начиная с номера 24.

Решение. В данной арифметической прогрессии

$$a_1 = 260, \quad d = 253 - 260 = -7.$$

Запишем формулу n-го члена этой прогрессии: $a_n = 260 - 7(n - 1)$ и решим неравенство $a_n = 260 - 7(n - 1) < 100$. Получим $n > 23\frac{6}{7}$. Значит, члены данной прогрессии становятся меньше 100, начиная с номера 24.

2. а) Ответ: 1111.

Решение. Обозначим искомую сумму через S, тогда $S = S_{25} - S_{14}$. Найдем S_{25} и S_{14}.

Имеем: $a_1 = 6$, $a_{14} = 5 \cdot 14 + 1 = 76$, $a_{25} = 5 \cdot 25 + 1 = 126$.

$$S_{25} = \frac{(6 + 126) \cdot 25}{2} = 1650, \quad S_{14} = \frac{(6 + 71) \cdot 14}{2} = 539,$$
$$S = 1650 - 539 = 1111.$$

Другое решение. Найдем сумму членов арифметической прогрессии, первый член которой равен a_{15}, а последний равен a_{25}. Имеем:

$$a_{15} = 76, \; a_{25} = 126, \; n = 25 - 14 = 11; \; S = \frac{(76 + 126) \cdot 11}{2} = 1111.$$

б) Ответ: 903.

Решение. Обозначим искомую сумму через S, тогда $S = S_{30} - S_9$. Найдем S_{30} и S_9.

Имеем: $a_1 = 5$, $a_9 = 2 \cdot 9 + 3 = 21$, $a_{30} = 2 \cdot 30 + 3 = 63$;

$$S_{30} = \frac{(5 + 63) \cdot 30}{2} = 1020, \quad S_9 = \frac{(5 + 21) \cdot 9}{2} = 117,$$
$$S = 1020 - 117 = 903.$$

Другое решение. Найдем сумму членов арифметической прогрессии, первый член которой равен a_{10}, а последний равен a_{30}. Имеем:

$a_{10} = 23$, $a_{30} = 63$,
$n = 30 - 9 = 21$;
$$S = \frac{(23 + 63) \cdot 21}{2} = 903.$$

3. а) Ответ: 16.

Решение. Последовательные четные числа образуют арифметическую прогрессию, первый член которой равен 2 и разность равна 2. Запишем формулу суммы первых n членов этой прогрессии:

$$S_n = \frac{4 + 2(n - 1)}{2} \cdot n.$$

Найдем значения n, при которых значение суммы больше 240. Для этого решим неравенство $\frac{4+2(n-1)}{2} \cdot n > 240$. После преобразований получим: $n^2 + n - 240 > 0$. Корни квадратного трехчлена равны -16 и 15. Учитывая, что n — натуральное число, получим решение неравенства: $n > 15$, где $n \in \boldsymbol{N}$. Наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству, равно 16.

б) Ответ: 14.

Решение. Последовательные нечетные числа образуют арифметическую прогрессию, первый член которой равен 1 и разность равна 2. Запишем формулу суммы первых n членов этой прогрессии:

$$S_n = \frac{2+2(n-1)}{2} \cdot n.$$

После преобразований получим $S_n = n^2$. Наибольшее натуральное число, для которого выполняется неравенство $n^2 < 200$, это число 14.

4. а) Ответ: 7500.

Решение. Пусть S — искомая сумма; $S = S_1 - S_2$, где S_1 — сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 150, S_2 — сумма всех натуральных чисел, кратных 3 и не превосходящих 150.

Найдем S_1: $S_1 = \frac{1+150}{2} \cdot 150 = 151\ \ 75.$

В последовательности (a_n) чисел, кратных 3 и не превосходящих 150, $a_1 = 3$, $a_n = 150$. Найдем число членов этой последовательности. Так как она задается формулой $a_n = 3n$, то $3n = 150$, $n = 50$.

Теперь найдем S_2: $S_2 = \frac{3+150}{2} \cdot 50 = 153 \cdot 25.$

Получим:

$$S = S_1 - S_2 = 151 \cdot 75 - 153 \cdot 25 = 25(453 - 153) = 7500.$$

б) Ответ: 3750.

Решение. Пусть S — искомая сумма; $S = S_1 - S_2$, где S_1 — сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 100, S_2 — сумма всех натуральных чисел, кратных 4 и не превосходящих 100.

Найдем S_1: $S_1 = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 101 \cdot 50.$

В последовательности (a_n) чисел, кратных 4 и не превосходящих 100, $a_1 = 4$, $a_n = 100$. Найдем число членов этой последовательности. Так как она задается формулой $a_n = 4n$, то $4n = 100$, $n = 25$.

Теперь найдем S_2: $S_2 = \frac{4 + 100}{2} \cdot 25 = 52 \cdot 25$.

Получим: $S = S_1 - S_2 = 101 \cdot 50 - 52 \cdot 25 = 25(202 - 52) = 3750$.

5. а) Ответ: является.

Решение. Если в геометрической прогрессии $b_2 = -6$ и $b_5 = 48$, то $q^3 = \frac{48}{-6} = -8$, т.е. $d = -2$, а $b_1 = -6:(-2) = 3$.

Далее можно поступать по-разному. Например, так. Подставим число 192 в формулу n-го члена геометрической прогрессии, получим уравнение $192 = 3 \cdot (-2)^{n-1}$ откуда $(-2)^{n-1} = 64$, $(-2)^{n-1} = (-2)^6$ $n - 1 = 6$, $n = 7$. Следовательно, $192 = b_7$.

Можно получить ответ и непосредственным умножением на -2 членов прогрессии, начиная с 48; получим:

$$48 \cdot (-2) = -96, \ -96 \cdot (-2) = 192.$$

б) Ответ: не является.

Решение. Если в геометрической прогрессии $b_3 = \frac{3}{2}$, $b_6 = 12$, то $q^3 = \frac{24}{3} = 8$, т.е. $q = 2$, а $b_1 = \frac{3}{2}:4 = \frac{3}{8}$. Подставив число 54 в формулу n-го члена геометрической прогрессии, получим уравнение $54 = \frac{3}{8} \cdot 2^{n-}$ откуда $2^{n-1} = 144$. Число 144 не является степенью числа 2, т.е. не существует такого натурального значения n, при котором данное равенство выполняется. Следовательно, число 54 не является членом данной геометрической прогрессии.

Точно так же, как и в задании а), можно умножением на 2 получить несколько следующих за b_6 членов прогрессии: 24; 48; 96; 192; Отсюда ясно, что число 144 не является членом этой геометрической прогрессии.

6. а) Ответ: $\frac{21}{32}$.

Решение. Найдем $b_1 = \frac{b_4}{q^3} = \frac{1}{24} \cdot 8 = \frac{1}{3}$. Тогда

$$S_6 = \frac{b_1(1 - q^6)}{1 - q} = \frac{\left(1 - \frac{1}{64}\right) \cdot 2}{3} = \frac{21}{32}.$$

б) Ответ: $\frac{63}{64}$.

Решение. Найдем $b_1 = \frac{b_5}{q^4} = \frac{3}{4 \cdot 16} = \frac{3}{64}$. Тогда

$$S_6 = \frac{b_1(1 - q^6)}{1 - q} = \frac{3 \cdot (1 - 64)}{64 \cdot 3} = \frac{63}{64}.$$

7. а) Ответ: на 200.

Решение. Каждое слагаемое суммы первых четырех членов арифметической прогрессии на $4d$ меньше соответствующего слагаемого суммы следующих четырех ее членов. Тогда сумма первых четырех членов арифметической прогрессии на $16d = 32$ меньше суммы следующих четырех ее членов. Отсюда $d = 2$. Аналогично сумма первых десяти членов этой прогрессии меньше суммы следующих десяти ее членов на $10 \cdot 10d = 100d = 200$.

б) Ответ: на 800.

Решение. Каждое слагаемое суммы первых пяти членов арифметической прогрессии на $5d$ больше соответствующего слагаемого суммы следующих пяти ее членов. Тогда сумма первых пяти членов арифметической прогрессии на $25d = 200$ больше суммы следующих пяти ее членов. Отсюда $d = 8$. Аналогично сумма первых десяти членов этой прогрессии больше суммы следующих десяти ее членов на

$$10 \cdot 10d = 100d = 800.$$

8. а) Ответ: 5.

Решение. Составим систему уравнений: $\begin{cases} b_1 + b_1q^3 = 36, \\ b_1q + b_1q^4 = 72. \end{cases}$

Решим ее: $\begin{cases} b_1(1 + q^3) = 36, \\ b_1q(1 + q^3) = 72; \end{cases}$ разделим второе уравнение почленно на первое ($b_1 \neq 0$, $q \neq -1$), получим: $\frac{b_1q(1 + q^3)}{b_1(1 + q^3)} = \frac{72}{36}$; отсюда $q = 2$. Из первого уравнения системы найдем первый член прогрессии: $b_1 = 4$.

Воспользовавшись формулой суммы первых n членов геометрической прогрессии, запишем равенство: $\frac{4 \cdot \left(2^n - 1\right)}{2 - 1} = 124$. Далее:

$$4 \cdot \left(2^n - 1\right) = 124, \quad 2^n - 1 = 31, \quad 2^n = 32, \quad 2^n = 2^5, \quad n = 5.$$

б) Ответ: 6.

Решение. Составим систему уравнений: $\begin{cases} b_1q^4 - b_1 = 80, \\ b_1q^5 - b_1q = 240. \end{cases}$

Решим ее: $\begin{cases} b_1(q^4 - 1) = 80, \\ b_1q(q^4 - 1) = 240; \end{cases}$ разделим второе уравнение почленно на первое ($b_1 \neq 0$, $q = \pm 1$), получим: $\dfrac{b_1q(q^4-1)}{b_1(q^4-1)} = \dfrac{240}{80}$; отсюда $q = 3$. Из первого уравнения системы найдем, что $b_1 = 1$.

Воспользовавшись формулой суммы первых n членов геометрической прогрессии, запишем равенство: $\dfrac{1 \cdot \left(3^n - 1\right)}{3 - 1} = 364$. Далее:

$$3^n - 1 = 728,\ 3^n = 729,\ 3^n = 3^6\ \ n = 6.$$

9. а) Ответ: $2 - \sqrt{3}$.

Решение. Пусть b, bq, bq^2 геометрическая прогрессия, где $|q| < 1$. Тогда b, $2bq$, bq^2 — арифметическая прогрессия. По свойству арифметической прогрессии имеем: $b + bq^2 = 4bq$. Разделим обе части равенства на b ($b \neq 0$), получим квадратное уравнение с одной переменной $q^2 - 4q + 1 = 0$. Отсюда $q = 2 \pm \sqrt{3}$.

С учетом того, что $|q| < 1$, подходит только $2 - \sqrt{3}$.

б) Ответ: $3 - 2\sqrt{2}$.

Решение. Пусть b, bq, bq^2 геометрическая прогрессия, где $|q| < 1$. Тогда b, $3bq$, bq^2 — арифметическая прогрессия. По свойству арифметической прогрессии имеем: $b + bq^2 = 6bq$. Разделим обе части равенства на b ($b \neq 0$), получим квадратное уравнение с одной переменной $q^2 - 6q + 1 = 0$. Отсюда $q = 3 \pm 2\sqrt{2}$.

С учетом того, что $|q| < 1$, подходит только $3 - 2\sqrt{2}$.

4. ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННОЙ РАБОТЫ

При подготовке к экзамену важно проверить себя в ситуации, максимально приближенной к реальной ситуации экзамена. Для этого предназначены два различных тренировочных варианта, которые приводятся в данном разделе.

Полезно выполнить тест целиком. Необходимо зафиксировать время, затраченное на выполнение всей работы. Отдельно — время на выполнение первой части работы, а также количество верных ответов. Результат по первой части работы можно считать удовлетворительным, если на ее выполнение затрачено не более 60 минут и верно выполнено 8 или 9 заданий. Если же за указанное время удалось выполнить верно 15 или 16 заданий, то имеются хорошие шансы получить на экзамене отметку «4» или «5».

Задания с выбором ответа считаются выполненными верно при условии, если обведен номер верного ответа. Задания с кратким ответом считаются выполненными, если после слова «Ответ» записан верный ответ. Задание на соотнесение считается выполненным, если в приведенную табличку правильно вписаны числа, соответствующие каждой букве.

Требования к выполнению заданий с развернутым ответом заключаются в следующем: решение должно быть математически грамотным, содержать рассмотрение всех возможных случаев (если таковые имеются), из него должен быть понятен ход рассуждений учащегося. Оформление решения должно обеспечивать выполнение указанных выше требований, а в остальном может быть произвольным.

4.1. Инструкция по выполнению работы

1. Работа состоит из двух частей. В первой части 16 заданий, во второй — 5. На выполнение всей работы отводится 4 часа. Время на выполнение первой части ограничено — на нее отводится 60 минут.

2. При выполнении заданий первой части нужно указывать только ответы.

— Если к заданию приводятся варианты ответов (четыре варианта, из них верным является только один), то для указания верного ответа надо обвести кружком его номер.

— Если вы ошиблись при выборе ответа, то зачеркните отмеченную цифру и обведите нужную.

— Если варианты ответов к заданию не приводятся, то полученный вами ответ надо вписать в отведенное для него место. В случае ошибки в записи ответа зачеркните его и напишите новый.

— Если требуется соотнести некоторые объекты (например, графики, обозначенные буквами А, Б, В, и формулы, обозначенные цифрами 1, 2, 3, 4), то впишите в приведенную таблицу под каждой буквой соответствующую цифру.

3. Все необходимые вычисления, преобразования и пр. выполняйте в черновике. Если задание содержит рисунок, то на нем можно проводить нужные линии, отмечать точки.

4. Задания второй части выполняются на отдельных листах с записью хода решения. Текст задания можно не переписывать, необходимо лишь указать его номер.

5. Для получения положительной оценки требуется выполнить правильно не менее 8 любых заданий первой части.

Желаем успеха!

4.2. Вариант 1

Часть 1

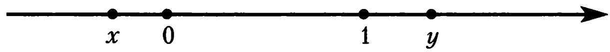
1 Найдите десятичную дробь, равную $1{,}65 \cdot 10^{-4}$

1) 0,0165 2) 0,00165 3) 0,000165 4) 0,0000165

2 Суточная норма потребления витамина С для взрослого человека составляет 60 мг. В 100 г свеклы в среднем содержится 23 мг витамина С. Сколько примерно процентов суточной нормы витамина С получил человек, съевший 100 г свеклы?

1) 38% 2) 0,38% 3) 260% 4) 2,6%

3 Числа x и y отмечены точками на координатной прямой. Расположите в порядке возрастания числа $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и 1.



1) $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, 1 2) 1, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ 3) 1, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{x}$ 4) $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{x}$, 1

4 Найдите значение выражения $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 1$ при $x = 1$.

Ответ: ___________

5 Площадь боковой поверхности цилиндра, высота которого равна радиусу основания R, вычисляется по формуле $S = 2\pi R^2$ Выразите из этой формулы радиус основания R.

1) $R = \sqrt{2\pi S}$ 2) $R = \sqrt{\frac{2\pi}{S}}$ 3) $R = \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$ 4) $R = \sqrt{\frac{\pi S}{2}}$

6 Представьте выражение $\frac{c^{-6}c^3}{c^{-2}}$ в виде степени.

1) c^0 2) c^6 3) c^{-5} 4) c^{-1}

7 Какое из выражений нельзя преобразовать в произведение

$$(4-y)^2(2-y)?$$

1) $-(y-4)^2(y-2)$ 2) $-(4-y)^2(y-2)$

3) $(y-4)^2(2-y)$ 4) $(y-4)^2(y-2)$

8 Представьте выражение $6m + \frac{3-7m^2}{m}$ в виде дроби.

Ответ: ___________

9 Решите уравнение $14 - x^2 = 0$.

Ответ: ___________

10 Для каждой системы уравнений определите число ее решений (используйте графические соображения). В таблице под каждой буквой запишите номер соответствующего ответа.

А) $\begin{cases} y = \dfrac{6}{x}, \\ y = -x^2 \end{cases}$ — 1) Нет решений

Б) $\begin{cases} y = \dfrac{6}{x}, \\ y = -3x \end{cases}$ — 2) Одно решение

В) $\begin{cases} y = \dfrac{6}{x}, \\ y = 3x \end{cases}$ — 3) Два решения

Ответ:

А	Б	В

11 Прочитайте задачу:

«В первый день школьник прочитал 29 страниц, во второй — 34 страницы, и вместе это составило 0,3 числа страниц в книге. Сколько страниц в книге?»

Какое уравнение соответствует условию задачи, если буквой x обозначено число страниц в книге?

1) $\dfrac{0{,}3}{x} = 29 + 34$
2) $0{,}3x = 29 + 34$
3) $x = 0{,}3 \cdot (29 + 34)$
4) $\dfrac{x}{0{,}3} = 29 + 34$

12 Арифметические прогрессии (a_n), (b_n) и (c_n) заданы формулами n-го члена:

$$a_n = 2n + 3,\ b_n = 3n,\ c_n = 3n + 2.$$

Укажите те из них, которые имеют разность, равную 3.

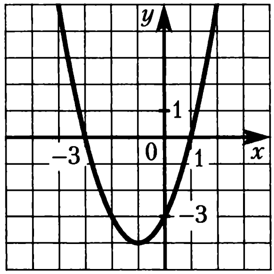
1) (a_n)
2) (a_n) и (c_n)
3) (b_n) и (c_n)
4) (a_n), (b_n) и (c_n)

13 Решите неравенство $19 - 7x > 20 - 3(x - 5)$.

1) $\left(-\infty; -\dfrac{1}{4}\right)$
2) $(-\infty; -4)$
3) $(4; +\infty)$
4) $(-4; +\infty)$

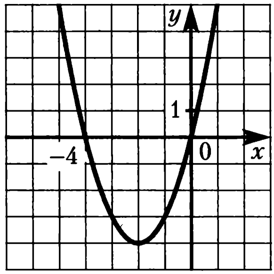
14 На рисунке изображен график функции $y = x^2 + 2x - 3$. Используя график, решите неравенство $x^2 + 2x - 3 < 0$.

Ответ: ___________

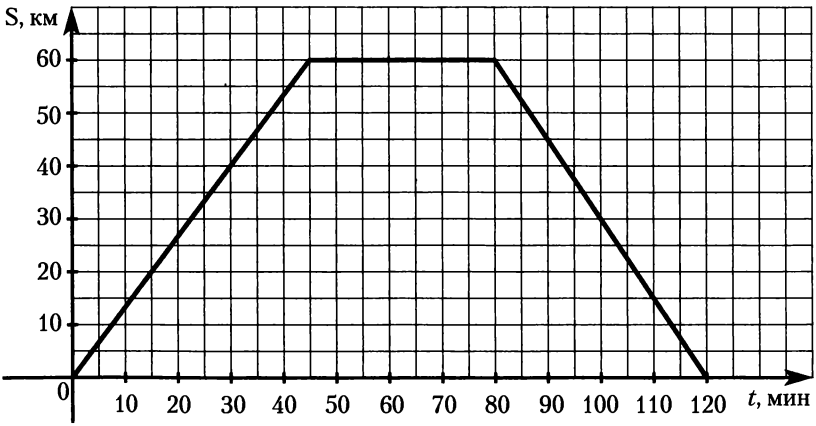


15 График какой из перечисленных ниже функций изображен на рисунке?

1) $y = x^2 + 4$
2) $y = x^2 + 4x$
3) $y = -x^2 - 4x$
4) $y = -x^2 - 4$



16 Автомобилист выехал из дома, доехал до дачи и, пробыв там некоторое время, вернулся домой. На рисунке изображен график его движения (по горизонтальной оси откладывается время, по вертикальной — расстояние, на котором автомобилист находится от дома). Найдите скорость автомобилиста на пути к даче, выразив ее в километрах в час.



Ответ: ___________

Часть 2

При выполнении заданий 17—21 используйте отдельный лист (бланк). Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение.

17 Найдите значение выражения $a^2 + 4a - 7$ при $a = 5 - \sqrt{2}$.

18 Постройте график функции ,$y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x - 3, \text{ если } x < -1, \\ 3x + 1, \text{ если } x \geqslant -1. \end{cases}$$

При каких значениях x функция принимает значения, меньшие 4?

19 Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии: –8,6; –8,4;

20 Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $A(0; -6)$, $B(1; -9)$, $C(6; 6)$. Найдите координаты ее вершины.

21 При каких значениях m уравнение $x^3 + 2x^2 - mx = 0$ имеет два различных корня?

4.3. Вариант 2

Часть 1

1 Площадь территории Испании составляет 506 тыс. км². Как эта величина записывается в стандартном виде?

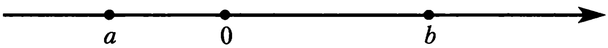
1) $5{,}06 \cdot 10^2$ км² 2) $5{,}06 \cdot 10^3$ км²

3) $5{,}06 \cdot 10^4$ км² 4) $5{,}06 \cdot 10^5$ км²

2 Из 59 девятиклассников школы 22 человека приняли участие в городских спортивных соревнованиях. Сколько примерно процентов девятиклассников приняли участие в соревнованиях?

1) 0,37% 2) 27% 3) 37% 4) 2,7%

3 На координатной прямой отмечены числа a и b. Какое из приведенных утверждений неверно?



1) $a+b>0$ 2) $a-b<0$ 3) $ab>0$ 4) $ab^2<0$

4 Найдите значение выражения $\sqrt{b} - \frac{1}{\sqrt{c}}$ при $b = 0{,}81$, $c = 0{,}04$.

Ответ: ___________

5 Из формулы периода обращения $T = \frac{t}{N}$ выразите время вращения t.

1) $t = \frac{T}{N}$ 2) $t = NT$ 3) $t = \frac{N}{T}$ 4) $t = \frac{1}{NT}$

6 Расположите в порядке убывания числа $\sqrt{30}$, $4\sqrt{2}$ и 6.

1) $6, 4\sqrt{2}, \sqrt{30}$ 2) $\sqrt{30}, 6, 4\sqrt{2}$

3) $4\sqrt{2}, 6, \sqrt{30}$ 4) $\sqrt{30}, 4\sqrt{2}, 6$

7 Сократите дробь $\frac{xy - x^2}{2xy}$.

1) $\frac{y-x}{2y}$ 2) $\frac{1-x}{2}$ 3) $\frac{y-x}{2x}$ 4) $-\frac{x^2}{2}$

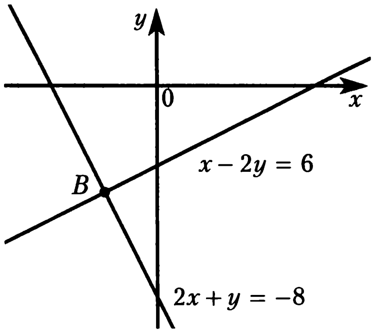
8 Преобразуйте в многочлен выражение $(3x+1)^2 - 9x(x+2)$.

Ответ: ___________

9 Решите уравнение $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

Ответ: ___________

10 Вычислите координаты точки B.



Ответ: ___________

11 Прочитайте задачу:

«В трех группах детского сада 70 детей. В старшей группе в 3 раза меньше детей, чем в средней, а в младшей — на 15 детей больше, чем в старшей. Сколько детей в старшей группе?»

Какое уравнение соответствует условию задачи, если буквой x обозначено число детей в старшей группе?

1) $x + (x + 15) + 3(x + 15) = 70$

2) $x + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3} + 15\right) = 70$

3) $x + \frac{x}{3} + (x + 15) = 70$

4) $x + 3x + (x + 15) = 70$

12 Из арифметических прогрессий, заданных формулой n-го члена, выберите ту, для которой выполняется условие $a_{25} < 0$.

1) $a_n = 2n$ 2) $a_n = -2n + 50$

3) $a_n = -2n + 100$ 4) $a_n = 2n - 100$

13 Решите неравенство $8 - \frac{1}{8}x < 0$..

1) $x < 1$ 2) $x < -1$ 3) $x > 64$ 4) $x > -64$

14 Для каждого неравенства укажите множество его решений. В таблице под каждой буквой запишите номер соответствующего ответа.

А) $x^2 + 25 < 0$ 1) $\varnothing$

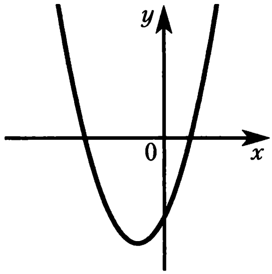
Б) $x^2 - 25 < 0$ 2) $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$

В) $x^2 - 25 > 0$ 3) $(-5; 5)$

Ответ:

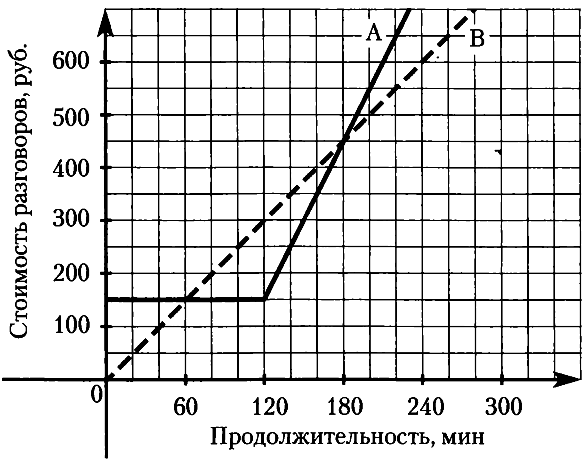
А	Б	В

15 На рисунке изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициента a и дискриминанта D.



1) $a > 0,\ D > 0$
2) $a > 0,\ D < 0$
3) $a < 0,\ D > 0$
4) $a < 0,\ D < 0$

16 Компания предлагаеst на выбор два разных тарифа для оплаты телефонных разговоров: тариф А и тариф В. Для каждого тарифа зависимость стоимости разговора от его продолжительности изображена графически. На сколько минут хватит 500 р., если используется тариф В?



Ответ: ___________

Часть 2

При выполнении заданий 17—21 используйте отдельный лист (бланк). Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение.

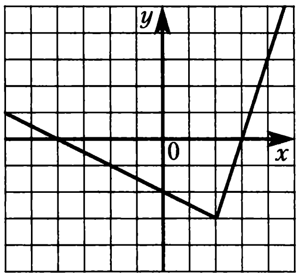
17 Решите уравнение $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$.

18 Решите неравенство $\left(\sqrt{19} - 4{,}5\right)(5 - 3x) > 0$.

19 В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 108, а сумма второго и третьего членов равна 135. Найдите первые три члена этой прогрессии.

20 При каких значениях m и n, связанных соотношением $m - n = 2$, выражение $m^2 - 4mn + n^2$ принимает наибольшее значение?

21 Задайте аналитически (т.е. с помощью формул) функцию, график которой изображен на рисунке.



4.4. Ответы и решения

Вариант 1

Ответы к заданиям части 1

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Ответ	3	1	1	$-\frac{5}{12}$	3	4	4	$\frac{3-m^2}{m}$

Номер задания	9	10	11	12	13	14	15	16
Ответ	$x_1 = \sqrt{14}$, $x_2 = -\sqrt{14}$	213	2	3	2	(−3; 1)	2	80 км/ч

Решение заданий части 2

17 Найдите значение выражения $a^2 + 4a - 7$ при $a = 5 - \sqrt{2}$.

Ответ: $40 - 14\sqrt{2}$.

Решение.

$$a^2 + 4a - 7 = \left(5 - \sqrt{2}\right)^2 + 4\cdot\left(5 - \sqrt{2}\right) - 7 =$$

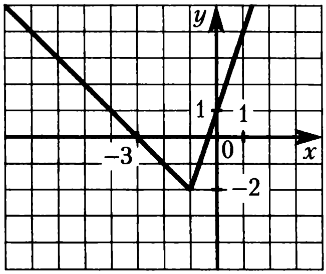
$$= 27 - 10\sqrt{2} + 20 - 4\sqrt{2} - 7 = 40 - 14\sqrt{2}.$$

18 Постройте график функции ,$y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x - 3, \text{если } x < -1, \\ 3x + 1, \text{если } x \geqslant -1. \end{cases}$$

При каких значениях x функция принимает значения, меньшие 4?

Ответ: график изображен на рисунке; $f(x) < 4$ при $x \in (-7; 1)$.



19 Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии: −8,6; −8,4;

Ответ: −189,2.

Решение. 1) Найдем разность прогрессии: $d = -8{,}4 + 8{,}6 = 0{,}2$.

2) Найдем число отрицательных членов прогрессии.

Составим формулу n-го члена:

$$a_n = -8{,}6 + 0{,}2(n - 1) = 0{,}2n - 8{,}8.$$

Решим неравенство $0{,}2n - 8{,}8 < 0$; получим $n < 44$. Значит, $n = 43$.

3) $S_{43} = \dfrac{(2\cdot(-8{,}6) + 0{,}2\cdot 42)\cdot 43}{2} = -189{,}2.$

20 Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $A(0; -6)$, $B(1; -9)$, $C(6; 6)$. Найдите координаты ее вершины.

Ответ: $x_0 = 2$, $y_0 = -10$. Другие формы ответа: $(2; -10)$; или $x = 2$, $y = -10$; или $x_в = 2$, $y_в = -10$.

Решение. 1) Найдем коэффициенты a, b и c в уравнении параболы $y = ax^2 + bx + c$.

Парабола проходит через точку $A(0; -6)$, значит, $c = -6$. Подставим координаты точек B и C в уравнение $y = ax^2 + bx + c$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a + b = -3, \\ 36a + 6b = 12. \end{cases}$$

Отсюда: $a = 1$, $b = -4$. Уравнение параболы имеет вид $y = x^2 - 4x - 6$.

2) Найдем координаты вершины:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 2,\ y_0 = 2^2 - 4\cdot 2 - 6 = -10.$$

21 При каких значениях m уравнение $x^3 + 2x^2 - mx = 0$ имеет два различных корня?

Ответ: при $m = 0$ и при $m = -1$.

Решение. 1)Представим уравнение в виде $x(x^2 + 2x - m) = 0$. Отсюда $x = 0$ или $x^2 + 2x - m = 0$. Таким образом, при любом значении m данное уравнение имеет корень, равный 0.

2) Рассмотрим уравнение $x^2 + 2x - m = 0$. Возможны два случая: $m \neq 0$ и $m = 0$.

При $m \neq 0$ получаем полное квадратное уравнение. Если его дискриминант равен нулю, то оно имеет единственный корень, а уравнение $x^2 + 2x - m = 0$ — два корня.

Имеем: $D_1 = 1 + m,\ 1 + m = 0,\ m = -1$.

Таким образом, при $m = -1$ исходное уравнение имеет два различных корня.

При $m = 0$ получаем неполное квадратное уравнение $x^2 + 2x = 0$, корни которого 0 и –2. Таким образом, при $m = 0$ уравнение $x^3 + 2x^2 - mx = 0$ также имеет два различных корня.

Вариант 2

Ответы к заданиям части 1

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Ответ	4	3	3	–4,1	2	1	1	$1 - 12x$

Номер задания	9	10	11	12	13	14	15	16
Ответ	1; 1,5	$B(-2; -4)$	4	4	3	132	1	200 мин

Решение заданий части 2

17 Решите уравнение $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$.

Ответ: -2; 2; 6.

Решение. Разложим на множители левую часть уравнения. Получим: $x^2(x-6) - 4(x-6) = 0$, $(x-6)(x^2-4) = 0$, $x - 6 = 0$ или $x^2 - 4 = 0$. Значит, уравнение имеет корни: -2; 2; 6.

18 Решите неравенство $\left(\sqrt{19} - 4{,}5\right)(5 - 3x) > 0$.

Ответ: $\left(1\frac{2}{3}; +\infty\right)$. Другая возможная форма ответа: $x > 1\frac{2}{3}$.

Решение. 1) Определим знак разности $\sqrt{19} - 4{,}5$. Так как $4{,}5 = \sqrt{20{,}25}$ и $\sqrt{20{,}25} > \sqrt{19}$, то $\sqrt{19} - 4{,}5 < 0$.

2) Получаем неравенство: $5 - 3x < 0$. Отсюда $x > 1\frac{2}{3}$.

19 В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 108, а сумма второго и третьего членов равна 135. Найдите первые три члена этой прогрессии.

Ответ: 48, 60, 75.

Решение. 1) Пусть (b_n) данная геометрическая прогрессия. Составим систему $\begin{cases} b_1 + b_1q = 108, \\ b_1q + b_1q^2 = 135. \end{cases}$ Далее:

$$\begin{cases} b_1(1+q) = 108, \\ b_1q(1+q) = 135, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1(1+q) = 108, \\ q \cdot 108 = 135. \end{cases}$$

Отсюда $q = \frac{5}{4}$, $b_1 = 48$.

2) $b_2 = 48 \cdot \frac{5}{4} = 60$, $b_3 = 60 \cdot \frac{5}{4} = 75$.

20 При каких значениях m и n, связанных соотношением $m - n = 2$, выражение $m^2 - 4mn + n^2$ принимает наибольшее значение?

Ответ: при $m = 1$, $n = -1$.

Решение. 1) Выразим из равенства $m - n = 2$ одну переменную через другую, например, переменную m через n: $m = 2 + n$. Подставим $2 + n$ вместо переменной m в выражение $m^2 - 4mn + n^2$, получим:

$$(2+n)^2 - 4n(2+n) + n^2 = -2n^2 - 4n + 4.$$

2) Выделим в трехчлене $-2n^2 - 4n + 4$ квадрат двучлена:

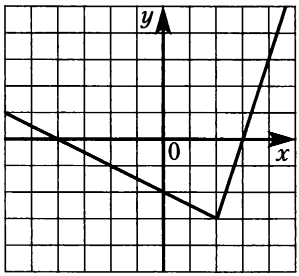
$$-2n^2 - 4n + 4 = -2(n+1)^2 + 6.$$

Значит, наибольшее значение трехчлен принимает при $n = -1$.

3) Из равенства $m = 2 + n$ найдем соответствующее значение m: $m = 2 - 1 = 1$.

Другое возможное решение. Второй шаг может быть выполнен с опорой на свойства квадратичной функции: функция $y = ax^2 + bx + c$, где $a < 0$, принимает наибольшее значение при $x = -\frac{b}{2a}$; воспользовавшись этой формулой, получим: $n = \frac{4}{-4} = -1$.

21 Задайте аналитически (т.е. с помощью формул) функцию, график которой изображен на рисунке.



Ответ: $y = \begin{cases} -0{,}5x - 2, \text{ если } x < 2, \\ 3x - 9, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$

Другие возможные формы ответа $y = \begin{cases} -0{,}5x - 2, \text{ если } x \leqslant 2, \\ 3x - 9, \text{ если } x > 2; \end{cases}$ коэффициент $-0{,}5$ может быть записан и с помощью обыкновенной дроби.

Решение. График функции состоит из двух лучей с общим началом в точке с координатами $(2; -3)$.

1) Составим уравнение прямой, проходящей через точки $(-4; 0)$ и $(2; -3)$. Подставив координаты точек в уравнение прямой $y = kx + b$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = -4k + b, \\ -3 = 2k + b. \end{cases}$$

Отсюда $k = -0{,}5$, $b = -2$. Значит, при $x < 2$ функция задается формулой $y = -0{,}5x - 2$.

2) Составим уравнение прямой, проходящей через точки $(3; 0)$ и $(2; -3)$. Подставив координаты точек в уравнение прямой $y = kx + b$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = 3k + b, \\ -3 = 2k + b. \end{cases}$$

Отсюда $k = 3$, $b = -9$. Значит, при $x \geqslant 2$ функция задается формулой $y = 3x - 9$.

Таким образом, $y = \begin{cases} -0{,}5x - 2, \text{ если } x < 2, \\ 3x - 9, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$

Замечание. 1) При составлении уравнений прямых можно брать любые удобные точки.

Другое возможное решение. Угловые коэффициенты прямых могут быть вычислены по формуле $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, где $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ — координаты точек, принадлежащих рассматриваемой прямой. Начальная ордината в одном случае может быть считана с графика, в другом — вычислена подстановкой координат какой-либо точки прямой в уравнение $y = 3x + b$.

ДЛЯ ЗАМЕТОК